«Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики в основной школе» (36 часов) вариативный модуль.

**Итоговая работа** выполнена **Ковалевой Галиной Александровной**, учителем математики *МОУ «СОШ №14 с УИОП», г. Сергиев Посад, гр. 199*

**ПЛАН-КОНСПЕКТ УРОКА**

Тема урока: **«Геометрическая вероятность»**

***Цель урока:***ввести определение геометрической вероятности

***Задачи:*** рассмотреть определение геометрической вероятности при выборе точки из фигуры на плоскости, при выборе точки из отрезка, из дуги окружности, при выборе точки из числового отрезка; добиться качественного понимания этого определения; научиться применять его при решении задач.

***Тип урока:*** *лекционно-семинарский*

***Формы работы учащихся:*** *ф*ронтальная, индивидуальная

***Ход урока:***

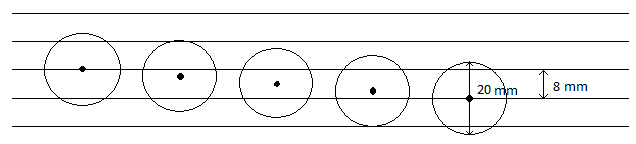
1. **Организационный момент формулирование темы урока**
2. **Постановка задачи (этап – “интрига”)**

*Учитель просит учеников дать классическое определение вероятности и предлагает задачу.*

Задача о монете.

На тетрадный лист в линейку наудачу бросается рублевая монета. Расстояние между линейками равно 8 мм, диаметр монеты 20 мм. Какова вероятность того, что монета пересечет

а) две линии б) три линии?

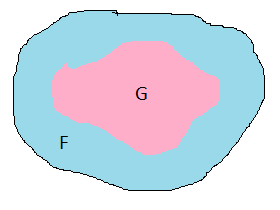
 *Ученики должны рассмотреть все возможные элементарные события в этом опыте и убедиться, что монета пересекает 2 или 3 линии. Важно подвести учеников к мысли, что исходы опыта можно связать с расстоянием от центра монеты до ближайшей линейки.*

*Результатом работы с этой моделью должно быть, что* количество возможных исходов (элементарных событий) в этом опыте бесконечно много! Это числа из отрезка [0; 4]. Благоприятствующих элементарных событий, соответствующих а) и б) тоже бесконечно много…

КАК ПОСЧИТАТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ?

1. **Геометрическое определение вероятности при выборе точки из фигуры на плоскости**

*Ученикам предлагается рассмотреть следующую задачу (фронтальная работа с обсуждением, причем учителю следует вводить определение после попыток учеников самостоятельно ответить на вопрос задачи).*



Точку наудачу бросают в область F на плоскости. Какова вероятность того, что точка попадет в некоторую область G, которая содержится в фигуре F?

Если предположить, что попадание в любую точку области F равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в область G будет равна отношению площадей области G и области F, то есть

, где

A={точка попадет в область G}

Такое определение вероятности называется **геометрическим**.

Заметим, что площадь фигуры G не больше, чем площадь фигуры F, поэтому P (A)≤1.

*Имеет смысл после введения определения поработать над качественным пониманием его, предложив следующий пример:*

Выберем на географической карте мира случайную точку (зажмурили глаза и показали указкой).

- Какова вероятность что эта точка окажется в России? (Для ответа на вопрос нужно знать какую часть всей карты занимает Россия)

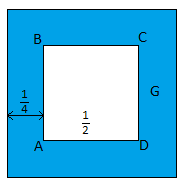
- Какова вероятность попасть в Гринвичский меридиан (Как ни странно, придется положить ее равной 0, так как площадь меридиана равна 0 – попасть указкой *точно* в меридиан невозможно)

4**. Решение задач**

Точку наудачу бросают в квадрат, сторона которого равна 1. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не больше, чем

*Решение этой задачи провести при фронтальном обсуждении его. У доски может работать ученик или учитель (зависит от подготовленности аудитории)*

Решение

SF=1 (площадь исходного квадрата)

Точка удалена от границы квадрата не более чем на , если она попала в заштрихованную на рисунке фигуру G.

SG = SF – SABCD = 1 - =

Если A = {расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не больше, чем }, то

P(A) = : 1 =

Ответ:

*Ученикам предлагается самостоятельно по вариантам решить следующие задачи:*

**I Вариант**

В квадрате случайным образом берется точка. Найдите вероятность того, что эта точка не принадлежит вписанному в этот квадрат кругу.

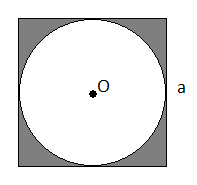
**II Вариант**

В круге случайным образом берется точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в этот круг квадрату.

*После решения эти задачи необходимо проверить и обсудить решения (слайд презентации, или подготовленная запись решения на откидной доске)*

Решения

**I Вариант**

Пусть сторона квадрата равна a, тогда r = a

Sкв = a2 ;

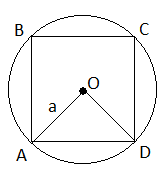
Sкр = πr2 = πa2

SA – площадь заштрихованной области квадрата

SA = Sкв - Sкр = a2 - πa2= a2

P (A) = =  Ответ:

**II Вариант**

****Пусть радиус круга равен a.

Тогда Sкр = πa2

AB = a

Sкв = 2a2  A = {точка принадлежит квадрату}, тогда

P (A) = =

Ответ:

*Если темп урока позволяет, имеет смысл задать дополнительные вопросы по этим задачам (вероятности попадания в другие, указанные учителем, области)*

1. **Геометрическое определение вероятности при выборе точки из отрезка, дуги окружности; при выборе точки из числового отрезка**

5.1 Случайный выбор точки X из отрезка MN можно понимать так, будто точку X случайным образом «бросают» на отрезок MN. Элементарным событием в этом опыте может стать выбор любой точки отрезка. Рассмотрим пример:



Пусть отрезок CD содержится в отрезке MN. Нас интересует событие A, состоящее в том, что выбранная точка X принадлежит отрезку CD.

Аналогично определению геометрической вероятности данному выше имеем

P (A) =

*Учителю стоит обратить внимание учеников на аналогию рассматриваемого примера с приведенным выше. Отличие состоит только в мерности объектов. И опять следует подчеркнуть, что P (A) – число неотрицательное и не превосходящее 1, как и полагается для вероятности случайного события. Далее предлагается пример для фронтальной работы с ним. Пример предлагается ученикам как задача. Цель работы с ним – качественное понимание данного определения. Не стоит давать рисунок вместе с текстом, так как в нем содержится подсказка.*

Внутри отрезка MN случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что точка X ближе к N чем к M.

Решение

Пусть O – середина отрезка MN. Обозначим указанное событие через A. Это событие наступит только тогда, когда точка X лежит внутри отрезка ON. То есть P (A) = =

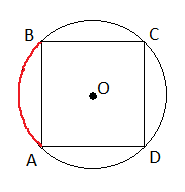
* 1. Ничего не меняется, если точка X выбирается не из отрезка, а из дуги некоторой кривой линии. Например, можно случайным образом выбирать точку X на окружности.

Пример: в окружность вписан квадрат ABCD. На окружности случайным образом выбирается точка M. Найдите вероятность того, что эта точка лежит на:

а) меньшей дуге AB

б) большей дуге AB

*Учитель предлагает ученикам самостоятельно решить эту задачу. Проверка с помощью слайда или рисунка, заранее подготовленного на откидной доске.*

** Решение

A – указанное событие

а) P (A) =

б) P (A) =

5.3 Геометрическую вероятность можно применять к числовым промежуткам. Предположим, что случайным образом выбирается число x, удовлетворяющее условию

m ≤ x ≤ n. Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка [m; n] на числовой прямой выбирается точка с координатой x.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что точка с координатой x выбирается из отрезка

[a; b], содержащегося в отрезке [m; n].



Это событие обозначим (a ≤ x ≤ b). Его вероятность равна отношению длин отрезков [a; b] и [m; n].

P (a ≤ x ≤ b) =

Пример:

Найти вероятность того, что точка, случайно выбранная из отрезка [0; 1], принадлежит отрезку []

Решение: P ( ≤ x ≤ ) = =

*Учитель подводит итог на этом этапе урока, задавая ученикам следующие вопросы:*

*- с какой вероятностью познакомились на этом уроке?*

*- для каких случаев была рассмотрена эта вероятность?*

*Учитель еще раз обращает внимание учеников на аналогичность определения геометрической вероятности во всех случаях и возвращает к началу урока, к задаче о монете, предлагая ученикам теперь ее решить.*

1. **Решение задачи о монете**

Вспомним, что положение монеты договорились оценивать по расстоянию от центра монеты до ближайшей линейке. Если обозначить это расстояние x, то множество всех исходов соответствует 0 ≤ x 4. Монета бросается на лист наудачу, это значит что все значения x из отрезка [0; 4] будут равновозможными.

Событие A = {монета пересекла две линии} соответствует 2 < x ≤ 4;

Событие B = {монета пересекла три линии} соответствует 0 ≤ x ≤ 2.

По формуле геометрической вероятности получим

P (A) = =

P (B) = = .

Ответ:

*Вероятности событий A и B получились одинаковыми. Стоит ученикам задать вопросы:*

*- можно ли это было предполагать с самого начала (нет)*

*- от чего эти результаты зависели (расстояние между линейками, размерами монеты).*

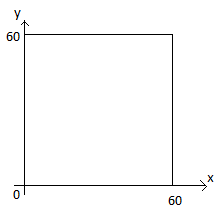
*Если темп работы аудитории позволяет, то хорошо бы успеть рассмотреть последним заданием урока задачу о встрече, как классический пример задачи, решение которой наглядно демонстрирует необходимость владения геометрическим определением вероятности.*

1. **Задача о встрече**

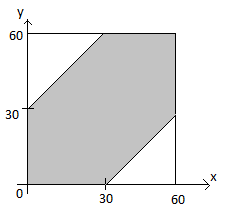
Илья и Женя договорились встретиться у памятника Пушкину с 17.00 до 18.00. Пришедший первым ждет другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них с одинаковой вероятностью может прийти в любой момент времени в течении заданного часа?

Решение

Обозначим время прихода Ильи через X, а Жени - через Y (для удобства будем выражать время в минутах, прошедших после 17 часов). Тогдо точка с координатами (x, y) будет случайной точкой в квадрате на плоскости Oxy, изображенном на рисунке:



Каждая точка этого квадрата – это один из возможных исходов нашего эксперимента. Эксперимент завершается встречей, если выполняется условие |x-y|<30. Множество таких точек закрашено на следующем рисунке:



Площадь закрашенной части можно найти, вычитая из площади квадрата площади двух равных треугольников:

S=602 – 2 ▪ ▪ 30 ▪ 30 = 3600 – 900 = 2700

Искомую вероятность встречи находим как отношение «благоприятной» площади ко всей площади квадрата:

P==

Ответ:

1. **Подведение итогов урока**