

БОЛГАРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Двадцатый турнир «Черноризец Храбр»

1 ноября 2011 г.

Инструкция для 11–12 классов

1. Время работы 90 минут. Не разрешается использование калькуляторов и другой вычислительной техники.
2. К каждой задаче есть 5 возможных ответов. В бланке ответов за номером задачи буквой А, Б, В, Г или Д отметьте тот ответ, который Вы считаете верным.
3. Пишите разборчиво ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ буквами. Неоднозначно или нечетко указанный ответ может быть сочтен ошибочным. Если Вы неуверены какой ответ дать, то можете соответствующее поле не заполнять, т. е. оставить поле за номером задачи пустым.

Замечание. Чертежи не обязательно точны — они только изображают описываемую в условии конфигурацию.

Очки назначаются в соответствии с ответами как следует:

- верный ответ задачи с номером от 1 до 10 — 5 очков;
- верный ответ задачи с номером от 11 до 20 — 7 очков;
- верный ответ задачи с номером от 21 до 30 — 9 очков;
- неуказанный ответ — 3 очка;
- ошибочный ответ — 0 очков;

Задачи предложены Бориславом Лазаровым, Боянки Савовой, Ивайло Кортезовым и Йорданом Табовым.

Перевод с болгарского Бойко Банчева.

Тема составлена Бориславом Лазаровым.

Двадцатый турнир «Черноризец Храбр»

Задачи для 11–12 классов

1. $\log_{20} 11 \in$

А) $(-\infty; -1]$ Б) $(-1; 0]$ В) $(0; 1]$ Г) $(1; 10]$ Д) $(10; +\infty)$

2. Какому из интервалов принадлежат корни уравнения $\sqrt{x^2 + 1} = x + 2011$?

А) $(-\infty; -2000]$ Б) $(-2000; -1000)$ В) $[-1000; 0)$
Г) $[0; 1000)$ Д) $[1000; +\infty)$

3. Чему равна сумма членов арифметической прогрессии $\{a_1, a_2, \dots, a_{2011}\}$ с первым членом $a_1 = -1005$ и разностью $d = 1$?

А) 0 Б) 1 В) 2011 Г) $\frac{2011 \cdot 2012}{2}$
Д) ни одному из перечисленных

4. Найдите наименьший корень уравнения $4^{x^2+2x-6} = 8^{x^2-3x+8}$.

А) 4 Б) 5 В) 7 Г) 9 Д) 10

5. К материальной точке приложено пара сил, чьи направления заключают угол 60° . Если величины двух сил соответственно $2N$ и $3N$, то какое из чисел

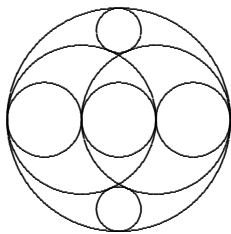
А) 1,5 Б) 2,5 В) 3,5 Г) 4,5 Д) 5,5

является наилучшим приближением величины суммарной силы (в ньютонах)?

6. Как упорядочены в возрастающем порядке числа $s = \sin 2011\pi$, $c = \cos 2011\pi$ и $t = \operatorname{tg} 2011\pi$?

А) $s < c < t$ Б) $c < s < t$ В) $t < c < s$
Г) $s < t < c$ Д) ни оно из перечисленных

13. Фигура на чертеже — внешняя окружность с радиусом 1, в которой расположены семь окружностей: две одинаковых больших, три одинаковых средних и две одинаковых маленьких, касающихся как показано. Чему равна сумма радиусов семи окружностей?

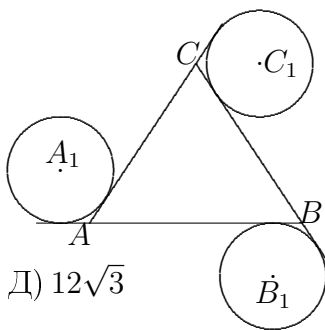


- А) $\frac{41}{15}$ Б) $\frac{35}{12}$ В) $\frac{49}{30}$ Г) $\frac{67}{24}$ Д) ни одному из указанных

14. Если $f(x) = x - \frac{1}{x}$, то сколько раз график функции $y = f(f(x))$ пересекает ось абсцисс?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 0

15. В равностороннем треугольнике $\triangle ABC$ со стороной 6 окружности с центрами A_1 , B_1 , C_1 и радиусами $\sqrt{3}$ касаются его сторон и их продолжений, как показано на чертеже. Чему равна площадь $\triangle A_1B_1C_1$?



- А) 21 Б) 24 В) $16\sqrt{3}$ Г) $16\sqrt{2}$ Д) $12\sqrt{3}$

16. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяет равенство $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ для любых двух вещественных чисел $x_{1,2}$, а у графика $f(x)$ имеется общая точка с осью абсцисс. Чему равно $f(2011)$?

- А) 1 Б) 2011 В) e^{2011} Г) $\ln 2011$
Д) ни одно из перечисленных

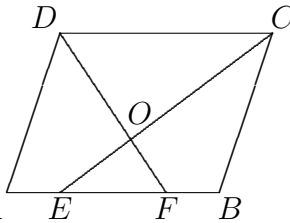
17. Рассмотрим трехцифрные числа, записанные только при помощи цифр 2, 3, 4 и 5 без повторений. Какова вероятность того, чтобы случайным образом выбранное такое число оказалось кратным 3?

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{1}{6}$ Д) ни одно из перечисленных

18. Какой будет цифра единиц в записи суммы $2011_{(3)} + 2011_{(4)}$ в пятеричной системе счисления?

- А) 4 Б) 3 В) 2 Г) 1 Д) 0

19. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Биссектрисы углов BCD и CDA пересекаются в точке O и пересекают AB соответственно в E и F . Чему равно отношение площадей треугольников EFO и CDO ?



- А) не определено однозначно Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{3}$ Д) $\frac{1}{4}$

20. Чему равна сумма периодических дробей $0, (2011) + 0, 0(2011)$?

- А) $\frac{2011}{9999}$ Б) $\frac{2011}{9090}$ В) $\frac{2011}{9900}$ Г) $\frac{2011}{9009}$
 Д) ни одному из указанных

21. Сколькими различными способами можно поделить, не разрывая их, 11 одинаковых кусков пиццы между 4 учениками, так что каждому досталось бы по крайней мере по куску.

- А) 720 Б) 440 В) 360 Г) 240 Д) 120

22. Для каждого угла $\alpha \in (0; 180^\circ)$ определим $\text{chord } \alpha$ как длину основы равнобедренного треугольника с бедрами 1 и углом α между ними. Как выражается $\text{chord } 2\alpha$ через $\text{chord } \alpha$ при $\alpha \in (0; 90^\circ)$?

- А) $\frac{\text{chord } \alpha}{\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}}$ Б) $\text{chord } \alpha \sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}$ В) $\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}$
 Г) $\frac{1}{\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}}$ Д) ни одно из указанных

23. Каков остаток суммы $1^{2010} + 2^{2010} + 3^{2010} + \dots + 2011^{2010}$ при делении на 2011?
 А) 1 Б) 2010 В) 1005 Г) 1006
 Д) ни одно из указанных

24. Сколько всего двухцифрных чисел \overline{xy} , таких что сумма трехцифрных чисел \overline{xux} и \overline{yxy} имеет в точности 8 делителей?
 А) 27 Б) 34 В) 49 Г) 51 Д) ни одно из указанных

25. Сколькими способами можно раскрасить 6 красками ребра правильного тетраэдра, считая две раскраски одинаковыми, если одну из них можно повернуть так, что получилась другая. (Правильным тетраэдром называется треугольная пирамида с равными ребрами.)
 А) 720 Б) 240 В) 120 Г) 60 Д) 30

26. Чему равна сумма первых 10 и последних 10 элементов в списке, печатаемом следующей программой ($\text{fs}(k)$ — k -ый по номеру элемент в списке fs)?

```
n:=20
fs:={0,1}
для i от 1 до n и для j от 0 до i:
    (k:=1; пока j/i>fs(k): k:=k+1;
    если j/i<fs(k), то в позицию k в fs вставить j/i)
напечатать fs
```

А) $\frac{21162959}{21162960}$ Б) $\frac{2763}{1980}$ В) 1 Г) 10 Д) 20

27. В пространстве задана прямоугольная система координат. Каждая точка с целыми координатами покрашена одним из n цветами. Каждые две отстоящие на расстоянии меньше 1,5 одна от другой точки являются разноцветными. Найти наименьшее возможное значение n .

А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 6 Д) 8

28. Будем считать, что точка лежит в параболе, если она принадлежит отрезку с концами на параболе. Каково наименьшее число парабол, таких что каждая точка в плоскости оказывается лежащей в параболе? (Ось параболы может лежать в любом направлении.)

А) 3 Б) 4 В) 6 Г) 8 Д) ни одно из указанных

29. Пусть $A = \{2^x 3^y 5^z : x, y, z \in \{0; 1; 2\}\}$. Подмножество $B \subset A$ назовем нераздельным, если в нем нет двух различных элементов, один из которых делит другой. Сколько самое большое может быть элементов у нераздельного множества?

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) 9

30. На чертеже — двадцать полей.

М									
									Т

В верхнем левом поле стоит муха (М). Из данного поля муха может перейти в нижнее или в правое поле или в то, которое по диагонали выше-справа от данного. В каком интервале число маршрутов, по которым муха может дойти до торта Т в нижнем правом поле?

А) [10; 100] Б) [100; 1000] В) [1000; 100000]
 Г) [100000; 1000000] Д) [1000000; 1000000000]