

БОЛГАРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Двадцатый турнир «Черноризец Храбр»
1 ноября 2011 г.

Инструкция для 9–10 классов

1. Время работы 90 минут. Не разрешается использование калькуляторов и другой вычислительной техники.
2. К каждой задаче есть 5 возможных ответов. В бланке ответов за номером задачи буквой А, Б, В, Г или Д отметьте тот ответ, который Вы считаете верным.
3. Пишите разборчиво ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ буквами. Неоднозначно или нечетко указанный ответ может быть сочтен ошибочным. Если Вы неуверены какой ответ дать, то можете соответствующее поле не заполнять, т. е. оставить поле за номером задачи пустым.

Замечание. Чертежи не обязательно точны — они только изображают описываемую в условии конфигурацию.

Очки назначаются в соответствии с ответами как следует:

- верный ответ задачи с номером от 1 до 10 — 5 очков;
- верный ответ задачи с номером от 11 до 20 — 7 очков;
- верный ответ задачи с номером от 21 до 30 — 9 очков;
- неуказанный ответ — 3 очка;
- ошибочный ответ — 0 очков;

Задачи предложены Бориславом Лазаровым, Боянки Савовой, Ивайло Кортезовым и Йорданом Табовым.

Перевод с болгарского Бойко Банчева.

Тема составлена Бориславом Лазаровым.

Двадцатый турнир «Черноризец Храбр»

Задачи для 9–10 классов

1. $\frac{2012^2 - 2011^2}{2011^2 - 2010^2} =$

А) $\frac{2012}{2010}$ Б) $\frac{2012^2}{2010^2}$ В) $\frac{4023}{4021}$ Г) $\frac{2012 \cdot 2011}{2011 \cdot 2010}$ Д) 1

2. Какое из данных чисел — наименьшее?

А) 2^{64} Б) 4^{32} В) 8^{16} Г) 16^8 Д) 32^4

3. Если $x_{1,2}$ — корни уравнения $x^2 - 2012x + 2011 = 0$, то чему будет равно $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

А) $\frac{2011}{2012}$ Б) $\frac{2012}{2011}$ В) $-\frac{2011}{2012}$ Г) $-\frac{2012}{2011}$
Д) ни одному из указанных

4. Для какого значения параметра k график функции $y = kx - 5$ содержит точку пересечения графиков функций $y = -x + 1$ и $y = x - 3$?

А) 0 Б) 1 В) -1 Г) 2 Д) -2

5. Чему равна сумма всех четырехцифрных чисел, чья запись состоит из цифр 0, 1, 1 и 2?

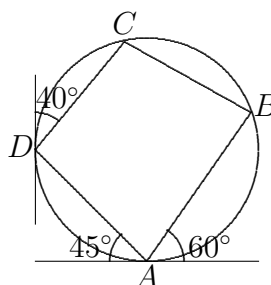
А) 10 666 Б) 12 888 В) 14 222 Г) 16 444

Д) ни одному из указанных

6. По данным чертежа определите сумму углов $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle CDA$ в градусах.

А) 150° Б) 180° В) 210° Г) 220°

Д) ни одно из указанных



7. Найдите наибольшее n , для которого $4^{n^2+2n-6} = 8^{n^2-3n+8}$.

А) 4 Б) 5 В) 7 Г) 9 Д) 10

8. Сумма любых 2011-и последовательных натуральных чисел есть число:

А) четное Б) нечетное В) составное Г) простое
Д) ни одно из указанных не является обязательным

9. В одном государстве живет 7 миллионов человек, а номера мобильных телефонов начинаются на 066, за которым следует еще 7 цифр. Встречаются все номера указанного вида. Сколько по крайней мере должно быть телефонных номеров у того, у кого их наибольшее количество?

А) 7 Б) 5 В) 4 Г) 3 Д) 2

10. Точка $A(5; 1)$ отображается при помощи осевой симметрии относительно биссектрисы осей координат O_x и O_y , проходящей через первый квадрант, в точку B . Точки C и D являются образами A соответственно при симметриях относительно осей ординат и абсцис. Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$?

А) 20 Б) 30 В) 40 Г) 50
Д) ни одному из перечисленных

11. Квадрат составлен из 36 квадратиков со стороной 1. Сколько всего прямоугольников (в том числе квадратов) площади 2, у которых вершины совпадают с вершинами единичных квадратиков?

А) 30 Б) 60 В) 65 Г) 75 Д) 85

12. При исполнении процедуры

ввод x

$y := x; \quad y := y - 2; \quad x := x - 3; \quad y := x * y$

печать y

напечатано 12. Какое значение x было введено?

А) 1 Б) -6 В) 3 Г) 0 Д) ни одно из указанных

13. Пусть x — наименьшее натуральное число, произведение цифр которого — 1890. Тогда наибольшее делящее x простое число есть:

- А) 631 Б) 643 В) 647 Г) 653 Д) 659

14. У четырехугольника $ABCD$ — стороны $AB = 3$, $BC = 6$, $CD = 7$ и $DA = 2$ и диагональ длины 6. Чему равно расстояние между точками касания этой диагонали с окружностями, вписанными в треугольные «половины» $ABCD$ по обе стороны от диагонали?

- А) нельзя сказать однозначно Б) 1 В) 2 Г) 3
Д) ни одно из указанных

15. Что написал известный автор **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ ᄡᄢᄡᄢᄡ**, работавший в Преславской книжной школе в конце 9 в. и начале 10 в.?

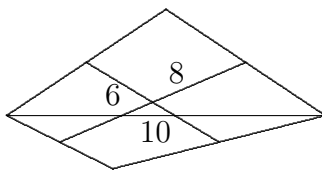
- А) **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ** Б) **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ** В) **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ**
Г) **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ** Д) **ᄡᄢᄡᄢᄡᄢᄡᄢ**

16. На чертеже — прямоугольник, разрезанный на 9 меньших. Площади некоторых из них обозначены числами или буквами. Чему равно $x + y$?

14	6	y
	12	24
x		30

- А) 36 Б) 42 В) 47 Г) 53 Д) ни одному из указанных

17. Чему равна площадь четырехугольника с диагоналю длины 10, если длины отрезков, соединяющие середины противоположных сторон — 8 и 6?



- А) 24 Б) 36 В) 48 Г) 60

Д) нельзя определить однозначно

18. Для каких значений параметра m у уравнения $x^4 - 2x^2 + m = 0$ имеется 4 разных вещественных корней?

- А) $m \in (-1; 1)$ Б) $m \in (-\infty; 1)$ В) $m \in (-1; +\infty)$
 Г) $m \in (-\infty; 0)$ Д) ни одно из указанных

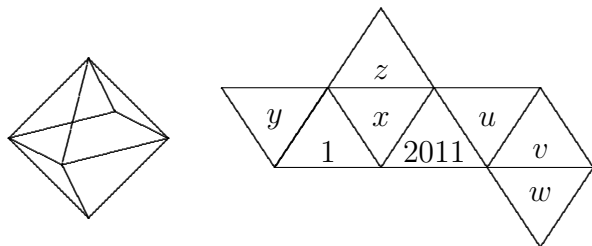
19. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяет равенство $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ для любых двух вещественных чисел $x_{1,2}$. Чему равно $f(2011)$, если $f(1) = 1$?

- А) 1 Б) 2010 В) 2011 Г) 2012
 Д) ни одному из указанных

20. Какова длина наименьшего интервала, содержащего решения неравенства $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) ∞

21. На чертеже показаны правильный октаэдр и его развертка. На гранях написаны числа 1, 2011 и u , v , ..., z . Если каждую из букв заменить на среднеарифметическое из чисел трех примыкающих к данной грани, чему будет равно $u - y$?



- А) 2012 Б) 1006 В) 1005 Г) 670
 Д) ни одному из указанных

22. Каково наибольшее возможное число сторон выпуклого 2011-угольника, равных его длиннейшей диагонали?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 6

23. Чему равен наибольший угол треугольника, у которого центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из его сторон.

- А) 90° Б) 108° В) 120° Г) 135° Д) 150°

24. 1-го августа г-н Соров купил золото за 1200 евро при курсе 60 долларов за грамм золота. 10-го августа он продал золото при курсе 1500 евро за тройскую унцию. Приблизительно сколько долларов выиграл или проиграл г-н Соров 10-го августа, если курс валют 1-го августа был 1,4 доллара за евро, 10-го августа — 1,5 доллара за евро, а килограмм золота равняется 32 тройским унциям?

- А) прибыль 96 долларов Б) убыток 144 доллара
В) прибыль 216 долларов Г) убыток 196 долларов
Д) ни одно из указанных

25. Сколькими различными способами можно поделить, не разрывая их, 11 одинаковых кусков пиццы между 4 учениками, так что каждому досталось бы по крайней мере по куску.

- А) 120 Б) 240 В) 360 Г) 440 Д) 720

26. Пусть $A = \{2^x 3^y : x, y \in \{0; 1; 2\}\}$. Подмножество $B \subset A$ назовем нераздельным, если в нем нет двух различных элементов, один из которых делит другой. Сколько самое большее может быть элементов у нераздельного множества?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) 6

27. Какой будет самая младшая цифра в записи суммы $2011_{(3)} + 2011_{(4)}$ в пятеричной системе счисления?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

28. Наименьшее натуральное число, у которого ровно 15 натуральных делителей есть:

- А) 48 Б) 96 В) 144 Г) 432 Д) 16 384

29. В 1904-м, в Софийском поле, на рассвете дня две старушки пошли по одной тропинке, но с противоположных концов. Каждая шла с одной и той же скоростью. Ровно в 12 старушки встретились и продолжили идти каждая в своем направлении. Одна из них дошла до конца тропинки к 4 часам после обеда, а другая — к 9 вечером. Что бы эти две старушки могли собрать по пути?

- А) подснежники Б) молодую крапиву
В) дикую клубнику Г) спелые мушмулы Д) бананы

30. Чему равна сумма первых 5 и последних 5 элементов в списке, печатаемом следующей программой ($fs(k)$ — k -ый по номеру элемент в списке fs)?

```
n:=12
fs:={0,1}
для i от 1 до n и для j от 0 до i:
    (k:=1; пока j/i>fs(k): k:=k+1;
    если j/i<fs(k), то в позицию k в fs вставить j/i)
напечатать fs
```

- А) $\frac{7157}{1980}$ Б) $\frac{2763}{1980}$ В) $\frac{25}{12}$ Г) $\frac{50}{12}$
Д) ни одному из перечисленных