*Николай Золотухин*

«Сумма к-мерных граней n-мерного куба (к=0,1,...,n)»

Вначале введём некоторые понятия:

вместо слова «точка» мы будем говорить «0-мерный куб», вместо слова «отрезок» - «1-мерный куб», вместо слова «квадрат» - «двумерный куб» и т д., а рассматривать мы будем произвольный n-мерный куб.

Далее, вершину n-мерного куба будем называть 0-мерной гранью, ребро n-мерного куба - одномерной гранью и т. д. Сам n-мерный куб будет называться n-мерной гранью.

Таким образом, у отрезка, или, что то же самое, одномерного куба две нульмерные грани и одна одномерная грань, у обычного трехмерного куба 8 нульмерных граней (вершин), 12 одномерных граней (ребер), 6 двумерных граней и 1 трехмерная грань - он сам.

Поставим задачу: дан n-мерный куб. Определим количество k-мерных граней у этого куба, где k изменяется от 0 до n и найдём их сумму. Будет получен интересный результат.

Всякая вершина n-мерного куба имеет свои координаты (a1, a2, a3 ... an), где a1, a2, a3, ... an это 0 или 1. 0 и 1 мы взяли для удобства, также можно взять любые два других числа.

Задачу мы будем решать по индукции:

1. K 0-мерный куб, который имеет одну 0-мерную грань.

2. а б

(0) (1)

1-мерный куб имеет две 0-мерные грани и одну 1-мерную грань.

3. 2-мерный куб имеет четыре 0-мерные грани, четыре 1-мерных, одну 2-мерную. Причём, если точки лежат на 1-мерной грани, у них совпадает 1 координата.

(0;1) (1;1)

(0;0) (1;0)

4. 3-мерный куб имеет восемь 0-мерных, двенадцать 1-мерных, шесть 2-мерных граней и одну 3-мерную грань (он сам). Если две точки лежат на одном ребре, у них совпадают 2 координаты, а если они лежат на 2-мерной грани, у них совпадает 1 координата.

Таким образом, в n-мерном кубе точки лежат на k-мерной грани, если у них совпадает k координат из n.

Первый пункт, который нам надо выяснить: сколько 0-мерных граней у n-мерного куба.

Любая вершина имеет свои координаты - a1,a2,a3,a4,...,an. На каждое место можно подставить 0 или 1 (всего 2 случая на место), поскольку координат n, то случаев 2n.

Рассмотрим количество 1-мерных граней у n-мерного куба (n-1 общая координата).

A(a1,a2,a3,...,an)

B(a1,a2,a3,...,bn)

В подчеркнутом столбце находятся несовпадающие координаты, но он может быть не только последним (n-ым), но и (n-1), (n-2),...,1(всего n случаев).

Рёбер - 

У 2-мерной грани n-2 общие координаты. Сколькими способами можно выбрать 2 несовпадающие координаты? -  случаями. Мы получаем формулу: ****.

У 3-мерной грани n-3 общие координаты. Формула - .

Мы пришли к формуле, по которой можно рассчитать количество k-мерных граней у n-мерного куба: . Следуя этой формуле, мы составим таблицу, где запишем количество 0,1,2,3,4,5,6,7,8-мерных граней у 0,1,2,3,4,5,6,7,8-мерных кубов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N\K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Сумма |
| 0 | 1 | x | x | x | x | x | x | x | x | 1 =30 |
| 1 | 2 | 1 | x | x | x | x | x | x | x | 3 =31 |
| 2 | 4 | 4 | 1 | x | x | x | x | x | x | 9 =32 |
| 3 | 8 | 12 | 6 | 1 | x | x | x | x | x | 27 =33 |
| 4 | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 | x | x | x | x | 81 =34 |
| 5 | 32 | 80 | 80 | 40 | 10 | 1 | x | x | x | 243 =35 |
| 6 | 64 | 192 | 240 | 160 | 60 | 12 | 1 | x | x | 729 =36 |
| 7 | 128 | 448 | 672 | 560 | 280 | 84 | 14 | 1 | x | 2187 =37 |
| 8 | 256 | 1024 | 1792 | 1792 | 1120 | 448 | 112 | 16 | 1 | 6561 =38 |

Главный вывод: сумма k-мерных граней n-мерного куба равна 3n