*Гончаров Валерий*

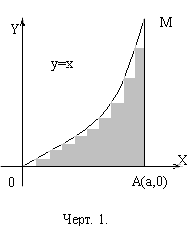
**«Использование курса истории математики на уроках пропедевтического характера»**

История математики хранит многие замечательные методы решения различных задач. И хотя в современной науке имеются значительно более простые и качественные способы решения заданий, исторический материал может быть эффективно использован на уроках математики.

Эффективность эта проявляется двояко. С одной стороны, решение задач старинными методами повышает кругозор, развивает мышление. С другой стороны, знание истории помогает понять происхождение понятий современной науки.

Применение методов учёных прошлых веков на уроках и факультативах по математике мы покажем на двух примерах: введение понятия определённого интеграла (по Риману) и решение задач на обыкновенные дроби. (11 и 6 классы соответственно).

Начнём с геометрической задачи. Предложим себе вычислить площадь, ограниченную кривой у=, где m - натуральное число, осью абсцисс и прямой x=a, где а - положительное число (черт. 1). Для вычисления площади криволинейного треугольника ОМА поступим следующим образом: разделим его основание - отрезок ОА на n равных частей. Пусть , , , ..., ,  - точки деления отрезка. В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси х-ов до пересечения с кривой. Строим прямоугольники, основаниями которых служат части отрезка ОА, а высотами - левые перпендикуляры. Мы заштриховали получившуюся фигуру. Площадь заштрихованной фигуры, состоящей из конечного числа прямоугольников, легко вычислить. Заметим, что основание каждого прямоугольника равно , т. е. N-ой



части отрезка ОА. Высота первого прямоугольника равна: , второго - , третьего - , (n-1)-го - . Площадь  заштрихованной фигуры равна сумме площадей этих прямоугольников, т. е.:



Для дальнейшего полезно оценить величину, стоящую в квадратных скобках. С этой целью выведем неравенство, которое часто используется и в других задачах.

Неравенство Бернулли. Если число , то  (2).

Доказательство. Применяем метод математической индукции. Если m=1, то неравенство верно, т. к.  Предполагаем, что неравенство верно и при m=k, т.е.  Умножив последнее неравенство на (1+х) (положительность этого числа следует из условия), получим:

 Значит, неравенство справедливо и для m=k+1. Этим завершено его доказательство для всех значений m.

Применив неравенство Бернулли для оценки величины 

Имеем: Отсюда следует, что  (3) Аналогично находим:

 (4)

Соединив вместе неравенства (3) и (4), получим:

 (5)

Теперь уже легко получить оценки величины, стоящей в скобках равенства (1). В самом деле, положив в неравенствах (5) вместо k последовательно 1, 2, 3, ..., (n-1), получим неравенства:



Cложив выписанные неравенства (заметим, что в правой и левой частях одинаковые числа с противоположными знаками будут уничтожаться при их сложении), найдём:

 (6)

Используя эти неравенства и возвращаясь к площади , найдём:



С другой стороны, 

Таким образом, окончательно

 (7)

Итак, мы нашли границы слева и справа для площади . Но перед нами стояла задача разыскания площади криволинейного треугольника ОМА. Для решения этой задачи заметим, что площадь  заштрихованной фигуры будет безгранично приближаться к площади S криволинейного треугольника, если число n делений отрезка неограниченно растёт. Это позволяет нам определить площадь S как предел последовательности площадей , когда число n стремится к :

S=lim .

Остаётся вычислить последний предел. С этой целью обратимся к неравенствам (7). Правая и левая части этих неравенств имеют предел  когда n стремится к бесконечности. Такой же предел имеет и промежуточная величина , т.е.



n стрем. к .

Дадим теперь определение определенного интеграла.

Пусть функция f(x) определена в промежутке . Разобьём этот промежуток на n произвольных частей точками



В каждом из полученных частичных промежутков  где j=0, 1, 2,…, n-1, выберем произвольно точку  Вычислим значение функции f и умножим его на разность  после этого составим сумму  которая называется интегральной суммой для функции f(x) на промежутке . Пусть  по-прежнему обозначает наибольшую из разностей  то есть длину наибольшего частичного промежутка.

Если существует конечный предел интегральной суммы при , не зависящий ни от способа дробления промежутка  на части ни от выбора точек , то этот предел называется определённым интегралом функции f(x) по промежутку  и обозначается символом . Таким образом,  Функция f(x) в этом случае называется интегрируемой в промежутке  Числа a и b называются соответственно нижними и верхними пределами интеграла, f(x) – подынтегральной функцией, x-переменной интегрирования.

Если бы мы сразу дали определение интеграла, то вряд ли кто нибудь его понял, однако после решения пропедевтической задачи всем становится понятным, что, по существу, введено понятие площади криволинейной трапеции.

В заключении дадим основу сценария урока или факультативного занятия по действиям с дробями.

Ко времени написания папирусов уже сложилась система счисления: десятичная иероглифическая. Для узловых чисел вида  установлены индивидуальные иероглифы. Алгоритмические числа записывались как комбинации узловых. С помощью этой системы египтяне справлялись со всеми вычислениями с целыми числами. Что касается дробей, то были в употреблении лишь дроби вида  (аликвотные) и некоторые индивидуальные, например  Все результаты, которые следовало записывать в виде дроби  выражались суммой аликвотных дробей. Для облегчения таких записей были составлены специальные таблицы, например таблица для чисел вида  «Тривиальное» представление  в таблицах не встречается (вероятно в силу очевидности). Подбор слагаемых также неоднозначен; по-видимому, таблицы складывались постепенно, в течении долгого времени и в дошедшем до нас виде являются просто сводкой достигнутых результатов.

Общей особенностью всей техники вычислений является её аддитивная устремлённость; все вычислительные операции по возможности сводятся к сложению. При умножении, например, используется способ постепенного удвоения одного из сомножителей и складывания получающихся подходящих частных произведений (их мы отметили звёздочками):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1212 | 1 | 12 |  | 1 |  |  |  |  |
|  | 2 | 24 |  | \*2 | 1 |  |  |  |
|  | \*4 | 48 |  | 4 | 3 |  |  |  |
|  | \*8 | 96 |  | \*8 | 7 |  |  |  |
|  | Вместе | 144 | Вместе |  | |  |  | или 9 |

При делении используется как процедура удвоения, так и последовательного деления пополам. Естественно, что деление было самой трудной операцией. Поэтому имеется большое разнообразие вычислительных приёмов. Иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение или двух третей или одной десятой доли числа. Например,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19:8 | 1 | 8 | 16:3 | \*1 | 3 | 4:15 | 1 | 15 |
|  | \*2 | 16 |  | 2 | 6 |  |  | 1 |
|  |  | 4 |  | \*4 | 12 |  |  |  |
|  | \* | 2 |  |  | 2 |  | \* | 3 |
|  | \* | 1 |  | \* | 1 |  | \* | 1 |
| Т.е. 19:8=2 | | | Т.е. 16:3= | | | Т.е. 4:15= | | |

Приведём пример ещё одной задачи: «Сало. Годовой сбор 10 беша. Каков ежедневный сбор? Обрати 10 беша в ро. Это будет 3200. Обрати год в дни. Это будет 365. Раздели 3200 на 365. Это будет  Обрати. Это  беша и  ро. Делай как делается.»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 365 |  | 243 |
| 2 | 730 |  | 36 |
| 4 | 1460 |  |  |
| 8 | 2920 |  |  |
| Вместе | | | |

Здесь в левом столбце постепенно подбирается частное. Первый результат: 8 даёт разницу между частичным и истинным делимым 3200-2920=280. Сомножитель  даёт: 365=243. Ещё 280 не достаёт 36. Выбирая , получим уже разницу в , так как 36-36=. Остаётся только подобрать число, которое, будучи умножено на 365, дало бы . Это: . Таким образом, частное подыскивается постепенным подбором.