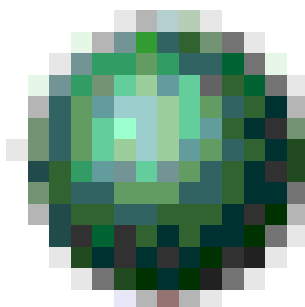


*МОУ лицей г. Лобня*



Элективный курс по математике в 10 классе  
**«Методы решения задач с параметрами»**  
(17 часов)

Автор: А.Н. Павлов, учитель математики лицея



Лобня, 2009

## Пояснительная записка

Задачи с параметрами – один из самых сложных разделов школьного курса математики. Овладение методикой их решения является очень полезным: оно существенно повышает уровень логической подготовки учащихся, позволяет по-новому взглянуть на функциональные зависимости, подробно анализируемые школьной программой. Эти задачи представляют как математический интерес, так и способствуют интеллектуальному развитию учащихся, служат хорошим материалом для отработки навыков их решения. Умение решать такие задачи разными способами помогает учащимся обрести чувство уверенности в своих силах.

Однако, результаты срезов знаний школьников и практика проведения ЕГЭ показывают, что задачи с параметром вызывают у учащихся наибольшее затруднение, как в логическом, так и в практическом плане. Поэтому умение решать такие задачи определяет успешность сдачи экзаменов. В заданиях ЕГЭ по математике с развернутым ответом, а также с кратким ответом (часть В), встречаются задачи с параметрами. Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, т.к. с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умениями выстроить логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащегося и математической культуры в целом.

В соответствии с этим целью курса является знакомство учащихся с общими методами и приемами решения задач с параметрами.

Задачами данного элективного курса являются:

- повышение уровня математической и логической культуры учащихся;
- развитие навыков исследовательской деятельности;
- формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
- развитие навыков решения задач с параметрами.
- подготовка к ЕГЭ и дальнейшему обучению в вузе.

Для реализации целей и задач данного элективного курса предполагается использовать следующие формы занятий: лекции, семинары, практикумы по решению задач. Доминантной же формой работы ученика должна стать самостоятельная деятельность ученика.

В результате изучения курса учащийся должен:

- усвоить основные аналитические и графические приемы решения уравнений, неравенств, систем уравнений с параметрами;
- применять алгоритмы решения уравнений, неравенств, содержащих параметр.
- проводить полное обоснование для решения задач с параметрами.

## Учебный план

№	Наименование темы	Количество часов		
		Всего	Теоретические занятия	Практические занятия
<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
1.1	Понятие параметра. Виды задач с параметрами	1	1	0
<b>2</b>	<b>Линейные уравнения и неравенства с параметрами</b>	<b>3</b>	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>
2.1	Линейные уравнения с параметрами	1	0,5	0,5
2.2	Линейные неравенства с параметрами	1	0,5	0,5
2.3	Системы линейных уравнений с параметрами	1	0,5	0,5
<b>3</b>	<b>Квадратные уравнения и неравенства с параметрами</b>	<b>5</b>	<b>2,5</b>	<b>2,5</b>
3.1	Квадратные уравнения с параметром	1	0,5	0,5
3.2	Применение теоремы Виета при решении задач с параметрами	1	0,5	0,5
3.3	Взаимное расположение корней квадратного трехчлена	1	0,5	0,5
3.4	Квадратные неравенства с параметрами	1	0,5	0,5
3.5	Уравнения и неравенства с модулями и параметрами	1	0,5	0,5
<b>4</b>	<b>Уравнения высших степеней. Иррациональные уравнения с параметрами</b>	<b>3</b>	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>
4.1	Уравнения высших степеней с параметрами.	1	0,5	0,5
4.2	Иррациональные уравнения с параметром.	1	0,5	0,5
4.3	Аналитические способы решения уравнений с параметрами. Графический способ решения уравнений с параметром	1	0,5	0,5
<b>5</b>	<b>Трансцендентные уравнения с параметром</b>	<b>3</b>	<b>1,5</b>	<b>1,5</b>
5.1	Применение свойств функций при решении задач с параметрами	1	0,5	0,5
5.2	Использование множества значений функции	1	0,5	0,5
5.3	Использование монотонности функции	1	0,5	0,5
<b>6</b>	<b>Производная и параметр</b>	<b>1</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>

6.1	Задачи на производную и касательные к графикам функции с параметрами	1	0,5	0,5
	<b>Итого</b>	<b>17</b>	<b>9</b>	<b>8</b>

## Содержание курса

### 1. Введение.

Теоретические сведения о задачах с параметрами, классификация, основные методы и приемы их решения.

### 2. Линейные уравнения и неравенства с параметрами.

Линейные уравнения с параметрами, линейные неравенства с параметрами. Системы линейных уравнений с параметрами.

### 3. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами.

Квадратные уравнения с параметрами. Применение теоремы Виета при решении задач с параметрами. Взаимное расположение корней квадратного трехчлена. Квадратные неравенства.

Методы решения уравнений с модулем. Методы решения неравенств с модулем. Аналитические способы решения уравнений с модулем и параметром. Графический способ решения уравнений с параметром. Методы решения неравенств с модулем и параметром.

### 4. Уравнения высших степеней.

Уравнения высших степеней с параметрами. Теорема Безу. Симметрические уравнения. Система однородных уравнений. Аналитические способы решения уравнений высших степеней с параметрами. Графический способ решения уравнений высших степеней с параметром.

### 6. Трансцендентные уравнения с параметрами.

Применение свойств функций при решении задач с параметрами. Использование множества значений функции. Использование монотонности функции.

### 7. Производная и параметр.

Задачи на производную и касательные к графикам функции с параметрами.

## Методические рекомендации

Безусловно, за короткий курс (17 часов) научить решать задачи с параметром невозможно. Поэтому роль учителя состоит, прежде всего, в консультационной работе, а также организации и координации учебных действий учащихся при самостоятельном решении заданий.

Учащиеся в ходе освоения курса имеют возможность познакомиться с научно-популярной литературой, информацией из Интернет и приложением к данной программе.

## Список рекомендуемой литературы

1. В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич «Задачи с параметрами», Минск, «Асар», 2008
2. П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир «Задачи с параметрами», М., «Илекса», 2007

**Сборник заданий  
к элективному курсу «Методы решения задач с параметрами»**

**Задания к блоку 2**

1. При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = (a - 2)x + 3a - 4$  является: а) четной; б) нечетной?
2. При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = (a - 3)x + a^2$  является монотонно убывающей?
3. При каких значениях  $m$  функция  $f(x) = (m^2 - 4)x + |m|$  имеет обратную функцию? Найдите эту функцию.
4. Решите уравнения и неравенства при всех значениях параметров  $a$  и  $b$ :  
а)  $(a^2 - 9)x = a^3 + 27$ ; б)  $ax < 1$ ; в)  $|3 - x| = a$ ; г)  $|x - a| = 3$ ; д)  $|x| > a$ ; е)  $|x| \leq a$ ;  
ж)  $\frac{a + x}{b} - \frac{x - b}{a} = 2$ .
5. При каких значениях  $a$  всякое решение неравенства  $x - 1 < 2$  является решением неравенства  $x < a$ ?
6. Найдите все значения  $a$ , при которых хотя бы одно решение неравенства  $2x - 3 > a$  является решением неравенства  $x - a < 3$ .
7. При каких значениях  $a$  из неравенства  $1 < |x - 3| < 2$  следует неравенство  $x + 5a < 0$ ?
8. Решите систему уравнений при всех значениях параметра  $a$ :  
$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = a^2. \end{cases}$$
9. При каком значении  $a$  сумма квадратов чисел, составляющих решение системы уравнений  $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$ , будет наименьшей?

**Задания к блоку 3**

1. Решите уравнения и неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  
а)  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0$ ; б)  $\frac{x}{x - 1} - \frac{4a - 3x^2}{ax - a - 3x + 3} - \frac{3x}{a - 3} = 0$ ; в)  $x^2 - 4x + a \leq 0$ .
2. При каких значениях  $a$  уравнение  $\frac{(x - 2)(x - a)}{\sqrt{2a + 4 - x}} = 0$  имеет единственное решение?
3. При каких значениях  $a$  уравнение  $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$  не имеет действительных корней?
4. При каких значениях  $a$  разность корней уравнения  $2x^2 - (a + 1)x + a = 1$  равна их произведению?
5. При каких значениях  $a$  неравенство  $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$  выполняется при всех значениях  $x$ ?

6. При каких значениях  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$  больше 3?

7. При каких значениях  $a$  все решения уравнения  $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$  удовлетворяют условию  $-1 < x < 5$ ?

8. При каких значениях  $a$  неравенство  $\frac{x-2a-3}{x-a+2} < 0$  выполняется при всех  $x$  из промежутка  $1 \leq x \leq 2$ ?

9. При каких значениях  $a$  и  $b$  система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax + by = 1 \end{cases}$  имеет единственное решение?

10. При каких значениях  $a$  уравнение  $x - a = 2|2|x| - a^2|$  имеет три различных корня?

11. Сколько решений имеет система  $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  в зависимости от значений параметра  $a$ ?

12. При каких значениях  $a$  система  $\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0, \\ ax = 1 \end{cases}$  имеет решения?

13. При каких значениях  $a$  система  $\begin{cases} x^2 - 4x + a \leq 0, \\ x^2 + 2x - 3a \leq 0 \end{cases}$  имеет единственное решение?

#### Задания к блоку 4

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x^2 - 2x)^2 - (a+2)(x^2 - 2x) + 3a - 3 = 0$  имеет четыре корня?

2. Решите неравенство  $x^4 + ax^3 + a^4x - a^6 \leq 0$  при всех  $a \geq 0$ .

3. Решите уравнения и неравенства при всех значениях параметра  $a$ :

- а)  $\sqrt[n]{x+1} = a$ ;      б)  $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-3} = a$ ;      в)  $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ ;  
г)  $\sqrt{x + \sqrt{a^2 + 2a - 3}} + \sqrt{x + a + \sqrt{1 - 2a + 2a^2 - a^3}} = a\sqrt{1-x}$ ;      д)  $\sqrt{x+a} \geq x+1$ ;  
е)  $5\sqrt{ax} < x + 4a$ .

4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{3}(x-a)$  будет отрезок длины  $\frac{9}{5}$ ?

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$  имеет единственное решение?

6. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\sqrt{x-a}(x^2 + (1+2a^2)x + 2a^2) = 0$  имеет ровно два различных корня?

7. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} (a+1)y^2 - 2ay + a - 9 = 0, \\ y = \sqrt{1-x} + 2 \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

### Задания к блоку 5

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнения имеют решения:

а)  $a \sin x - 2a \cos x = 1$ ;

б)  $\cos^2 x + (2a+6)\cos x + (2a-7)(1-4a) = 0$ ;

в)  $\sin x - \cos 2x = 4a^2 + 4a + 3$ .

2. При каких значениях  $a$  уравнение  $(\sin x - a)(\sin x + 2a - 1) = 0$  на промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$  имеет а) один корень; б) два корня; в) более двух корней?

3. Определите, при каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\sin^3 x + \cos^3 x \geq a$  имеет решения?

4. При каких значениях параметра  $a$  уравнения  $\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0$  и  $(a+3)\sin^2 2x - \sin 2x \cos 4x - (a+4)\sin 2x = 0$  равносильны?

5. При каких значениях  $\alpha \in [0; 2\pi)$  система  $\begin{cases} \sin \alpha \sin x - y^2 \cos \alpha = 0, \\ \cos \alpha \sin x + y^2 \sin \alpha = 3 \end{cases}$  имеет решения?

6. Решите неравенство при всех  $a$ :  $\arccos(3ax+1) \leq \arccos(2x+2a-1)$ .

7. При каком значении  $a$  уравнение  $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$  имеет единственное решение?

8. Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$ :  $\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$ .

9. Определите число корней уравнения при всех значениях параметра  $a$ :  $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ .

### Задания к блоку 6

1. При каких  $a$  и  $b$  функция  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-1} & \text{при } x < a, \\ 3x+b & \text{при } a \leq x < 3, \\ 7 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$  дифференцируема на

$\mathbb{R}$ ?

2. При каких значениях  $a$  касательная к параболе  $y = 4x - x^2$  в точке  $M(1; 3)$  пересекает параболу  $y = x^2 - ax - a$  в двух точках?

3. При каких  $a$  выполняется неравенство  $\int_1^a \sqrt{3x+1} dx \leq \frac{61}{36}$ .



4. Ракета должна пролететь отрезок длины  $h$ , начиная движение с постоянной скоростью  $v$ . В любой момент времени может включиться ее дополнительный двигатель, работающий до конца пути и дающий постоянное ускорение  $a > 0$ . Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения с коэффициентом пропорциональности  $k_1 > 0$ , а на участке пути с включенным дополнительным двигателем расход топлива пропорционален квадрату времени с коэффициентом пропорциональности  $k_2 > 0$ . Какое время ракета должна лететь с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?

### Дополнительные задачи

1. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :

$$\frac{2^x + 3}{2^x - 2} + \frac{2^x + 7}{2^x - 4} = \frac{2a}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}.$$

2. Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) + 1 = a$ .

3. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2 \log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1)$  имеет единственное решение?

4. При каких  $a$  множество решений неравенства  $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$  содержит промежуток  $\left[ \frac{1}{4}; 1 \right]$ ?

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x-a)^2(a(x-a)^2 - a - 1) = -1$  имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

6. При каких значениях  $a$  уравнение  $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$  имеет решения?

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + ay - cz, \\ y^2 + z^2 = -ax + cy + bz, \\ z^2 + x^2 = cx - by + az. \end{cases}$$

8. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $3xy - 4x^2 < a(x^2 + y^2)$  имеет решения?

9. Найдите все значения  $a$ , которые удовлетворяют условию  $2 < a < 5$  и при которых уравнение  $\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos \left( \pi x - \frac{\pi}{6} \right)$  имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию  $2 \leq x \leq 3$ .

10. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $4^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a| + 2) = 0$  имеет ровно три корня?

11. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $|2x - a| + 1 = |x + 3|$  имеет единственное решение.

12. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} y = a(x-3), \\ \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} = 1 \end{cases}$  не

имеет решений?

13. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$  имеет ровно 8 решений.

14. При каких значениях  $a$  уравнение  $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$  имеет единственное решение?

15. Значениями переменных  $x, y$  являются действительные числа. Найдите все целые значения  $n$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$  имеет решения.

16. Найдите значения  $c$  и  $d$ , при которых наибольшее значение функции  $y(x) = \left| 4 \cdot \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + 2(c + 2d) \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$  на отрезке  $[-1; 1]$  является наименьшим.

17. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  имеет единственное решение?

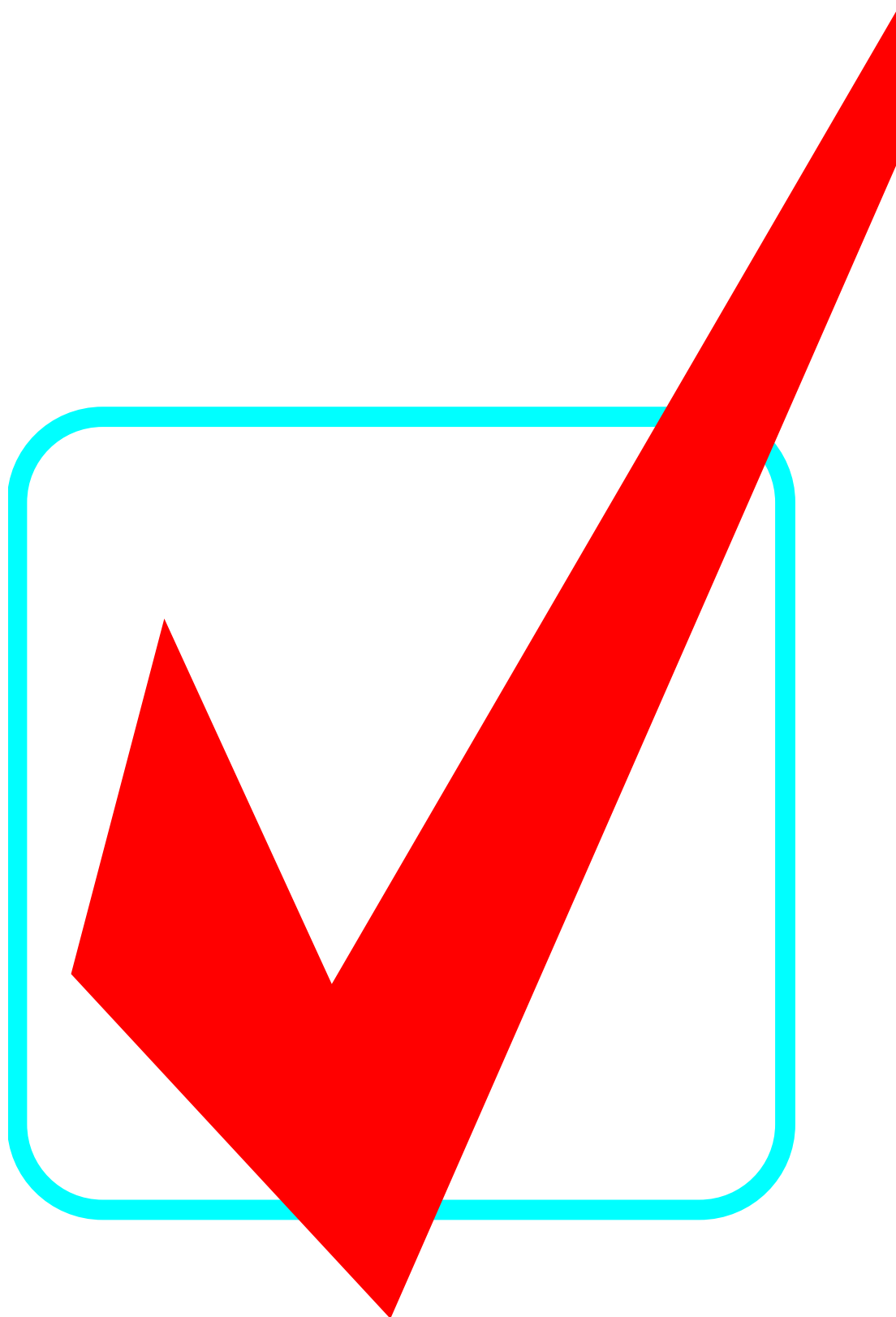
18. При каких значениях параметра  $a$  системы уравнений  $\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases}$  и

$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases}$  эквивалентны?

19. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} z \cos(x-y) + (2+xy) \sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x+y+a \sin^2 z)((1-a) \ln(1-xy) + 1) = 0 \end{cases}$  имеет единственное решение?

20. При каких значениях параметра  $a$  фигура, заданная на координатной плоскости условием  $|y| \leq \left( \sqrt{a - |x|} \right)^2 + \arcsin(\sin(a - |x|))$ , представляет собой четырнадцатигульник?

**Дидактический материал  
к элективному курсу  
«Методы решения задач с параметрами»**



## Дидактический материал

### 1. Знакомство с параметром.

Материал занятия – в списке литературы.

### 2. Линейные уравнения с параметром.

Начнем с простого примера. Решим линейное уравнение

$$6x - 1 = x + 6. \quad (a)$$

Перенесем в левую часть уравнения слагаемые, содержащие  $x$ , а в правую — не содержащие  $x$ . Получим:

$$6x - x = 6 + 1,$$

$$5x = 7,$$

$$x = \frac{7}{5},$$

$$x = 1,4.$$

Если в уравнении (а) заменить какое-либо число, например, число 6, другим числом, то можно получить новые уравнения:

$$5x - 1 = x + 5, \quad (б)$$

$$4x - 1 = x + 4, \quad (в)$$

$$3x - 1 = x + 3. \quad (г)$$

Каждое из уравнений (б) – (г) решается тем же способом, что и уравнение (а). Чтобы не решать несколько однотипных уравнений одним и тем же способом, решим задачу в общем виде, заменив изменяемое число (параметр) буквой:

$$ax - 1 = x + a$$

Действуя по тому же плану, что и при решении уравнения (а), придем к уравнению

$$(a - 1)x = a + 1. \quad (д)$$

Только не будем торопиться с делением на  $a - 1$ , ведь это выражение при  $a = 1$  обращается в нуль, а на нуль делить нельзя. Случай  $a = 1$  нужно рассмотреть отдельно.

1) Если  $a \neq 1$ , то уравнение (д) имеет вид

$$0x = 2.$$

Очевидно, что в этом случае уравнение (д) не имеет корней.

2) Если же  $a \neq 1$ , то уравнение (д) имеет единственный корень

$$x = \frac{a+1}{a-1}.$$

5

Нетрудно убедиться, что по формуле  $x = \frac{a+1}{a-1}$  мы получим корни уравнений (б) – (г), если в качестве  $a$  возьмем числа 5, 4 и 3 соответственно.

Задание, которое мы только что выполнили, обычно формулируют так: для всех значений параметра  $a$  решите уравнение

$$ax - 1 = x + a.$$

Ответ к этому заданию можно записать так:

Ответ. Нет корней при  $a = 1$ ;  $x = \frac{a+1}{a-1}$  при  $a \neq 1$ .

Заметим, что наши рассуждения о параметре начались с уравнения (а), имевшего единственный корень, но после замены числа 6 на букву  $a$  оказалось, что полученное уравнение имеет единственный корень не при всех значениях  $a$ . При  $a = 1$  оно не имеет корней.

Рассмотрим несколько заданий с параметром.

**Пример 1.** При каждом значении параметра  $a$  решим уравнение

$$ax - 6 = 2a - 3x. \quad (1)$$

Перепишав уравнение в виде  $(a + 3)x = 2(a + 3)$ , рассмотрим два случая:  $a = -3$  и  $a \neq -3$ .

Если  $a = -3$ , то любое действительное число  $x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) является корнем уравнения (1).

Если же  $a \neq -3$ , то уравнение (1) имеет единственный корень  $x = \frac{2(a+3)}{a+3} = 2$ .

Ответ.  $x \in \mathbf{R}$  при  $a = -3$ ;  $x = 2$  при  $a \neq -3$ .

**Пример 2.** При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$a(x - 1) = 2x + 5 \quad (2)$$

не имеет корней?

Перепишем уравнение (2) в виде

$$(a - 2)x = a + 5. \quad (2')$$

Если  $a = 2$ , то уравнения (2') и (2) не имеют корней.

Ответ. При  $a = 2$ .

**Пример 3.** Найдём все значения параметра  $a$ , при каждом из которых число 7 является единственным корнем уравнения

$$x - 7 = ax - 7a^2. \quad (3)$$

I способ. Если для некоторого значения параметра  $a$  число 7 является корнем уравнения (3), то для этого значения  $a$  справедливо равенство

$$7 - 7 = 7a - 7a^2,$$

или равенство

$$a(a - 1) = 0,$$

которое справедливо при  $a = 0$  или  $a = 1$ .

Внимание! Мы ещё не получили ответа, так как нашли два значения  $a$ , предполагая, что число 7 является корнем уравнения. Требуется, чтобы этот корень был единственным, поэтому ещё нужно проверить, является ли число 7 единственным корнем уравнения (3) при  $a = 0$  или  $a = 1$ .

Если  $a = 0$ , то уравнение (3) перепишем в виде

$$x - 7 = 0.$$

При  $a = 0$  число 7 является единственным корнем уравнения (3).

Если же  $a = 1$ , то уравнение (3) перепишем в виде

$$x - 7 = x - 7.$$

При  $a = 1$  любое действительное число  $x$  является корнем уравнения (3), следовательно, число 7 не является единственным корнем уравнения (3).

II способ. Перепишем уравнение (3) в виде

$$x(a - 1) = 7(a - 1)(a + 1). \quad (3')$$

При  $a = 1$  корнем уравнения (3') является любое число, т. е. число 7 не является единственным корнем уравнения. Поэтому  $a \neq 1$ , но тогда это уравнение имеет единственный корень  $x = 7(a + 1)$ . Условие задачи будет выполнено, если этот единственный корень есть число 7:

$$7(a + 1) = 7,$$

то есть при  $a = 0$ .

Ответ.  $a = 0$ .

**Пример 4.** Найдем все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения

$$ax - 5 = x + a \quad (4)$$

и

$$a^2x - 3 = x + a^2 \quad (5)$$

имеют общий корень.

Перепишем уравнение (4) в виде

$$(a - 1)x = a + 5. \quad (4')$$

Уравнение (4') имеет корень лишь при  $a \neq 1$ . Этот корень есть число  $x_1 = \frac{a+5}{a-1}$ .

Перепишем уравнение (5) в виде

$$(a^2 - 1)x = a^2 + 3. \quad (5')$$

Уравнение (5') имеет корень лишь при  $a \neq \pm 1$ . Этот корень есть число  $x_2 = \frac{a^2+3}{a^2-1}$ .

Осталось найти все значения параметра  $a \neq \pm 1$ , при каждом из которых уравнения (4') и (5') имеют общий корень. Для этого решим уравнение

$$\frac{a+5}{a-1} = \frac{a^2+3}{a^2-1}.$$

Перенесем все слагаемые в одну часть уравнения и, упростив разность алгебраических дробей, получим уравнение

$$\frac{6a+2}{a^2-1} = 0,$$

имеющее единственный корень  $a = -\frac{1}{3}$ . Так как  $-\frac{1}{3} \neq \pm 1$ , то при  $a = -\frac{1}{3}$  условие задачи выполнено.

Ответ.  $a = -\frac{1}{3}$ .

## Самостоятельная работа по теме «Линейные уравнения с параметром»

1. При каждом значении параметра  $a$  решите уравнение

$$ax - 6 = 4a - 7x.$$

(1) Нет корней при  $a = -7$ ;  $x = \frac{4a+6}{a+7}$  при  $a \neq -7$

(2)  $x = \frac{4a+6}{a+7}$       (3)  $x = \frac{4a-6}{a-7}$       (4)  $x = \frac{4a+6}{a+7}$  при  $a \neq -7$

(5) нет корней при  $a = 7$ ;  $x = \frac{4a-6}{a-7}$  при  $a \neq 7$

2. При каждом значении параметра  $a$  решите уравнение

$$a^2x - 6 = 3a + 4x.$$

(1)  $x = \frac{3}{a+2}$       (2)  $x = \frac{3}{a-2}$       (3)  $x = \frac{3a-6}{a^2+4}$

(4) нет корней при  $a = 2$ ;  $x \in \mathbf{R}$  при  $a = -2$ ;  $x = \frac{3}{a-2}$  при  $a \neq \pm 2$

(5) нет корней при  $a = -2$ ;  $x \in \mathbf{R}$  при  $a = 2$ ;  $x = \frac{3}{a+2}$  при  $a \neq \pm 2$

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых число 5 является единственным корнем уравнения

$$ax - 5a = 10 - 2x.$$

(1)  $a$  — любое число,  $a \neq -2$       (2)  $a = -2$

(3)  $a = 4$       (4)  $a$  — любое число      (5)  $a = 1$

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $ax = x - 2$  и  $x + a = 2 - ax$  имеют общий корень.

(1)  $a = 0$       (2)  $a = 4$       (3)  $a = 5$

(4)  $a = 1, a = -4$       (5)  $a = 0, a = 5$

### 3. Система линейных уравнений с параметрами.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

В этой системе хотя бы один из коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  при  $x$  отличен от нуля, пусть для определенности  $a_2 \neq 0$ . Тогда из второго уравнения системы получим, что  $x = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}$ . Подста-

вив полученное выражение вместо  $x$  в первое уравнение системы и умножив уравнение на  $a_2 \neq 0$ , получим уравнение

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2. \quad (2)$$

Здесь возможны три случая.

1) Если

$$a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0, \quad (3)$$

то уравнение (2) имеет единственный корень, поэтому и система (1) имеет единственное решение.

Если не только  $a_2 \neq 0$ , но и  $b_2 \neq 0$ , то условие (3) можно записать в виде  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ . Такая запись удобна для запоминания (коэффициенты при  $x$  и  $y$  не пропорциональны).

2) Если

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 0 \text{ и } a_2c_1 - a_1c_2 = 0, \quad (4)$$

то уравнение (2) имеет бесконечное множество корней, поэтому система (1) имеет бесконечное множество решений.

Если не только  $a_2 \neq 0$ , но и  $b_2 \neq 0$ , и  $c_2 \neq 0$ , то условия (4) можно записать в виде  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ . Такая запись удобна для запоминания (коэффициенты первого уравнения пропорциональны коэффициентам второго уравнения).

3) Если

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 0 \text{ и } a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0, \quad (5)$$

то уравнение (2) не имеет корней, поэтому система (1) не имеет решений.

Если не только  $a_2 \neq 0$ , но и  $b_2 \neq 0$ , и  $c_2 \neq 0$ , то условия (5) можно записать в виде  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ . Такая запись удобна для запоминания (коэффициенты при  $x$  пропорциональны коэффициентам при  $y$ , но не пропорциональны свободным членам).

Если в уравнении (1) не  $a_2 \neq 0$ , а  $a_1 \neq 0$ , то, проводя аналогичные рассуждения, мы получим тот же результат — уравнение (2). Это означает, что сделанные выводы не зависят от того, какой из коэффициентов  $a_1$  или  $a_2$  (или оба) отличны от нуля.

**Пример 1.** Определим число решений системы

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ 10x - 4y = 26; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 10x + 8y = 14; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 7x - 3y = 13 \\ 21x - 9y = 28. \end{cases}$$

а) Коэффициенты при  $x$  и  $y$  второго уравнения системы не равны нулю и  $\frac{5}{10} \neq \frac{2}{-4}$ , поэтому система имеет единственное решение.

б) Все коэффициенты второго уравнения системы не равны нулю и  $\frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{7}{14}$ , поэтому система имеет бесконечное множество решений.



в) Все коэффициенты второго уравнения системы не равны нулю и  $\frac{7}{21} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{13}{28}$ , поэтому система не имеет решений.

- Ответ. а) Система имеет единственное решение;  
б) система имеет бесконечное множество решений;  
в) система не имеет решений.

**Пример 2.** Определите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + (a+2)y = 2 \\ x + 3ay = 3a - 1 \end{cases} \quad (6)$$

имеет единственное решение.

Если  $a \neq 0$ , то система (6) имеет единственное решение при выполнении условия  $\frac{a}{1} \neq \frac{a+2}{3a}$ , а для любых  $a$  система (6) имеет единственное решение, если выполняется условие

$$3a^2 \neq a + 2. \quad (7)$$

Так как уравнение  $3a^2 = a + 2$  имеет два корня  $a_1 = 1$  и  $a_2 = -\frac{2}{3}$ , то при всех  $a \neq 1$ ,  $a \neq -\frac{2}{3}$  выполняется условие (7), то есть система (6) имеет единственное решение.

Ответ. При  $a \neq 1$ ,  $a \neq -\frac{2}{3}$ .

**Пример 3.** Определите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (2-a)x + 2y = a^2 - 4a + 4 \\ x + 2y = a^2 - 2a + 2 \end{cases} \quad (8)$$

имеет бесконечно много решений.

Прежде всего заметим, что  $a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \neq 0$ , то есть все коэффициенты второго уравнения системы (5) отличны от нуля.

Тогда система (5) имеет бесконечно много решений при условии

$$\frac{2-a}{1} = \frac{2}{2} = \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 - 2a + 2}.$$

Так как уравнение  $\frac{2-a}{1} = \frac{2}{2}$  имеет единственный корень  $a_1 = 1$  и при  $a = 1$  справедливо равенство  $\frac{2}{2} = \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 - 2a + 2}$ , то система (8) имеет бесконечно много решений только при  $a = 1$ .

Ответ. При  $a = 1$ .

**Пример 4.** При каком значении параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+4)y = 4 \\ x + 4y = a \end{cases} \quad (9)$$

не имеет решений?

Система (9) не имеет решений при выполнении условий  $\frac{a+1}{1} = \frac{a^2+4}{4} \neq \frac{4}{a}$  (если  $a \neq 0$ ) или условий  $a^2 + 4 = 4a + 4$  и  $a^2 + a \neq 4$  (для любых значений  $a$ ).

Уравнение  $a^2 + 4 = 4a + 4$  имеет корни  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 4$ , при каждом из этих двух значений  $a$  выполняется условие  $a^2 + a \neq 4$ , поэтому система (9) не имеет решений при  $a = 0$  и  $a = 4$ .

Ответ. При  $a = 0, a = 4$ .

Теперь рассмотрим задачу, в которой требуется решить систему линейных уравнений при всех значениях параметра.

**Пример 5.** При всех значениях параметра  $a$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - (5a - 25)y = -10 \\ x + (a^2 - 5a)y = 2a. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} x = (5a - 25)y - 10 \\ (a^2 - 25)y = 2(a + 5). \end{cases} \quad (11)$$

1) Если  $a = 5$ , то второе уравнение системы (11) не имеет корней. В этом случае система (10) не имеет решений (знак  $\emptyset$  пустого множества в ответе означает, что система не имеет решений).

2) Если  $a = -5$ , то решением второго уравнения системы (11) является любое действительное число  $y$ . Тогда  $x = -50y - 10$ , то есть решением системы (10) является любая пара чисел  $(-50y - 10; y)$ , где  $y$  — любое действительное число ( $y \in \mathbf{R}$ ).

3) Если  $a \neq \pm 5$ , то второе уравнение системы (11) имеет единственный корень  $y = \frac{2}{a-5}$ . Из первого уравнения системы (11) вычислим значение  $x$ :

$$x = \frac{(5a-25) \cdot 2}{a-5} - 10 = \frac{(a-5) \cdot 10}{a-5} - 10 = 0.$$

В этом случае система (10) имеет решения  $\left(0; \frac{2}{a-5}\right)$ .

Ответ.  $\emptyset$  при  $a = 5$ ;

$(-50y - 10; y), y \in \mathbf{R}$  при  $a = -5$ ;

$\left(0; \frac{2}{a-5}\right)$  при  $a \neq \pm 5$ .

## Самостоятельная работа по теме «Системы линейных уравнений с параметром»

1. Укажите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} (a-1)x + 3y = 5 \\ 4x + (a+3)y = 10 \end{cases}$  имеет единственное решение.

- (1)  $a = 3$                       (2)  $a \neq 3$                       (3)  $a \neq -5$   
 (4)  $a \neq -3, a \neq 5$         (5)  $a \neq 3, a \neq -5$

2. Укажите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} ax + 2y = a + 4 \\ 4x + (a+2)y = 12 \end{cases}$  имеет бесконечно много решений.

- (1)  $a = 2, a = -4$         (2)  $a = -4$                       (3)  $a = 2$   
 (4)  $a = -8$                       (5)  $a = 2, a = -8$

3. Укажите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} (a-1)x - 2y = 3 \\ 2x - (a+2)y = a + 4 \end{cases}$  не имеет решений.

- (1)  $a = 2$                       (2)  $a = -3$                       (3)  $a = 2, a = -3$   
 (4)  $a \neq 2$                       (5)  $a \neq -3$

4. При всех значениях параметра  $a$  решите систему уравнений

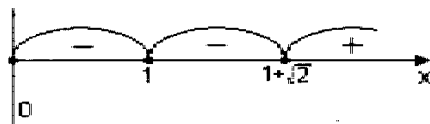
$$\begin{cases} x - (a+3)y = -1 \\ ax - (3a+9)y = a-6. \end{cases}$$

- (1)  $\emptyset$  при  $a = -3$ ;  $\left(1; \frac{2}{a+3}\right)$  при  $a \neq -3$   
 (2)  $\emptyset$  при  $a = -3$ ;  $\left(\frac{a-9}{a+3}; \frac{6-2a}{(a+3)^2}\right)$  при  $a \neq -3$   
 (3)  $(-1; y), y \in \mathbf{R}$  при  $a = -3$ ;  $\left(1; \frac{2}{a+3}\right)$  при  $a \neq -3$   
 (4)  $\emptyset$  при  $a = -3$ ;  $(6y - 1; y), y \in \mathbf{R}$  при  $a = 3$ ;  $\left(1; \frac{2}{a+3}\right)$  при  $a \neq \pm 3$   
 (5)  $\emptyset$  при  $a = 3$ ;  $(-1; y)$ , где  $y \in \mathbf{R}$  при  $a = -3$ ;  $\left(1; \frac{2}{a+3}\right)$  при  $a \neq \pm 3$

#### 4. Неравенства с параметрами.

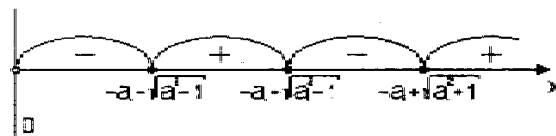
**Пример 1.** Решить неравенство  $|x + 2a| \leq \frac{1}{x}$ .

**Решение.** При  $x \leq 0$  неравенство решений не имеет, поэтому далее считаем, что  $x > 0$ , но тогда исходное неравенство равносильно неравенству  $|x^2 + 2ax| \leq 1$ . После возведения в квадрат обеих частей последнего неравенства получаем ему равносильное неравенство  $(x^2 + 2ax - 1)(x^2 + 2ax + 1) \leq 0$ . Пусть  $f(x) = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 + 2ax - 1)$  и  $D(f) = R_+$ . Нули  $f$ :  $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ ,  $x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ . Корень  $x = -a - \sqrt{a^2 + 1}$  не удовлетворяет условию  $x > 0$ . Очевидно, что  $x = -a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$  при всех  $a \in R$ . Корни  $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$  удовлетворяют условию  $x > 0$  только при  $a \leq -1$ . Рассмотрим случай  $a = -1$ . В этом случае нули функции  $f$ :  $x = 1 + \sqrt{2}$  и  $x = 1$ , причем последний корень кратности 2.



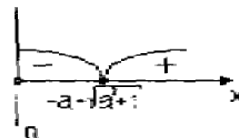
Итак, при  $a = -1$   $x \in (0; 1 + \sqrt{2}]$ .

Пусть  $a < -1$ . Имеем ситуацию, представленную на рисунке:



Ясно, что при  $a < -1$   $0 < x < -a - \sqrt{a^2 - 1}$ ;  $-a + \sqrt{a^2 - 1} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$ .

Далее случай  $a > -1$ . Оба корня  $x = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$  не удовлетворяют условию  $x > 0$ .



При  $a > 1$   $0 < x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$ .

Ответ: при  $a < -1$   $0 < x < -a - \sqrt{a^2 - 1}$ ;  $-a + \sqrt{a^2 - 1} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$ ;

при  $a = -1$   $0 < x \leq 1 + \sqrt{2}$ , при  $a > -1$   $0 < x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$ .

**Пример 2.** Для каждого значения параметра  $a$  решить неравенство  $2|x - a| < 2ax - x^2 - 2$ .

**Решение.**

Введем обозначение  $f(x) = 2|x - a| - (2ax - x^2 - 2)$ . Необходимо решить неравенство  $f(x) < 0$ .  $D(f) = R$ . Находим нули функции.

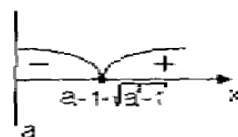
$$1) \begin{cases} x \geq a \\ 2x - 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0 \end{cases} \text{ После решения уравнения системы по-}$$

лучим  $x = a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . Найдем те значения  $a$ , при которых

$x \geq a$ .  $a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} \geq a$ , откуда  $a \leq -\sqrt{2}$  и  $a \geq \sqrt{2}$ ; при этих зна-

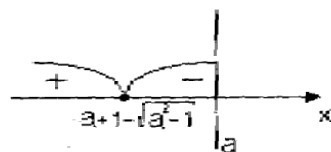
чениях  $a > 0$  и  $a^2 - 1 > 0$ . Неравенство  $-a - 1 - \sqrt{a^2 - 1} \geq -a$  выполняется при  $a > \sqrt{2}$   $4a^2 - 4a + 1 > a^2 - 1$ ,  $3a^2 - 4a + 2a > 0$ , и т. к.  $D < 0$ , то последнее неравенство выполняется при всех  $a > \sqrt{2}$ .

Пусть  $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . Итак, при  $a > \sqrt{2}$   $x = a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 1}$ , и оба корня не меньше  $a$ .  $x \in [a; a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}]$ .



$$2) \text{ Пусть теперь } x \leq a, \text{ тогда } -2x + 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0, \\ x^2 - 2x(1 + a) + 2(2 + a) = 0.$$

Очевидно, что неравенство  $a+1+\sqrt{a^2-1} \leq a$  не выполняется ни при каких  $a$ , а неравенство  $a+1-\sqrt{a^2-1} \leq a$  вновь выполняется при  $a < -\sqrt{2}$  и при  $a > \sqrt{2}$ .



Ясно, что  $x \in (a+1-\sqrt{a^2-1}; a]$ .

Ответ: при  $|a| \leq \sqrt{2}$  неравенство решений не имеет;

при  $|a| > \sqrt{2}$   $a-\sqrt{a^2-1}+1 < x < a+\sqrt{a^2-1}+1$ .

### Упражнения.

Решить методом интервалов неравенства:

1.  $x^2 - |x| + a \geq 0$ .

2.  $x^2 \leq |x - a|$ .

В дальнейшем мы познакомимся с графическим методом решения неравенств, который является более наглядным и в ряде случаев дает более простое решение.

Решения, ответы:

1. **Решение.** Пусть  $f(x) = x^2 - |x| + a$ .  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Находим нули функции  $f$ :

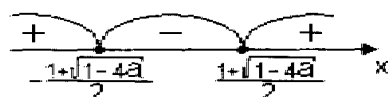
$$|x|^2 - |x| + a = 0, \quad |x| = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

Если  $1-4a \leq 0$ ,  $a \geq 0,25$ , то квадратные трехчлены  $x^2 - x + a$  и  $x^2 + x + a$  неотрицательны. В этом случае  $x \in \mathbb{R}$ .

Если  $a < 0,25$ , то нули  $|x| = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ . Если  $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < 0$ ,

то есть  $a < 0$ , то уравнение  $|x| = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$  (\*) корней не имеет

$$\text{и } x \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}; +\infty\right).$$



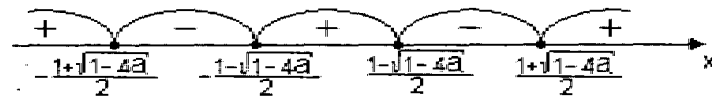
Если  $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = 0$ , т. е.  $a = 0$ , то  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ .



Ясно, что  $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$ .

Если  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} > 0$ , то  $0 < a < 0,25$  и уравнение (\*) имеет два

корня:  $x = \pm \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}$ .



Если  $0 < a < 0,25$ , то

$$\in \left( -\infty; -\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}; \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \right] \cup \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}; +\infty \right)$$

Ответ: при  $a < 0$   $x \in \left( -\infty; -\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right] \cup \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}; +\infty \right)$ ;

при  $a = 0$   $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$ ;

при  $0 < a < 0,25$

$$x \in \left( -\infty; -\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}; \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \right] \cup \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}; +\infty \right)$$

при  $a \geq 0,25$   $x \in R$ .

## 2. Решение.

$$1) \begin{cases} x \geq a \\ x^2 \leq x - a \end{cases}; \begin{cases} x \geq a \\ x^2 - x + a \leq 0 \end{cases}. \text{ Если } D < 0, \text{ т. е. } 1 - 4a < 0, a > 0,25, \text{ то}$$

неравенство решений не имеет. Если  $D = 0$ , т. е.  $a = 0,25$ ;  $x = 0,5$  и условие первого неравенства системы выполняется.

Если  $D > 0$ , тогда  $a < 0,25$  и уравнение  $x^2 - x + a = 0$  имеет два

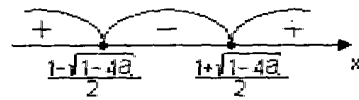
корня:  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$ .

Покажем, что оба корня при  $a < 0,25$  больше  $a$ :

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} > a; \sqrt{1 - 4a} > 2a - 1, \text{ что верно при указанных } a.$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} > a; \sqrt{1 - 4a} < -2a + 1. \quad 1 - 2a > 0 \text{ при } a < 0,25 \text{ и после}$$

возведения в квадрат получаем  $1 - 4a < 1 - 4a + 4a^2$ , которое очевидно.



Значит, если  $a < 0,25$ , то  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

$$\text{и } x \in \left[ \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \right].$$

- 2)  $\begin{cases} x < a \\ x^2 + x - a \leq 0 \end{cases}$ . Если  $D < 0$ , т. е.  $1 + 4a < 0$ ,  $a < -0,25$ , то второе неравенство системы не выполняется ни при каких значениях  $x$ . Если  $D = 0$ , а  $a = -0,25$ , то  $x = -0,5$  и первое неравенство системы выполняется. Если  $D > 0$ , т. е.  $a > -0,25$ , то квадратный

трехчлен имеет два корня:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ .

$$\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2} < a \text{ очевидное неравенство при } a > -0,25.$$

Выясним, при каких значениях  $a$   $\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2} < a$ , для чего

решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a > -0,25 \\ \sqrt{1+4a} < 2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -0,25 \\ 1+4a < 4a^2+4a+1 \end{cases}, \text{ то есть второй корень}$$

должен также быть меньше  $a$ .

$$\text{Тогда } x \in \left[ \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2} \right].$$

Ответ: при  $a = 0,25$   $x = 0,5$ ;

при  $a = -0,25$   $x = -0,5$ ;

при  $a < 0,25$  неравенство решений не имеет;

при  $-0,25 < a < 0,25$

$$x \in \left[ \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \right] \cup \left[ \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2} \right];$$

$$\text{при } a > 0,25 \quad x \in \left[ \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \right].$$

## 5. Дробно-рациональные уравнения с параметром.

Пример 1. Решить уравнение  $\frac{x-a}{x+2} = 0$

*Решение.* Уравнение имеет смысл при всех  $x \neq -2$ . С учетом ОДЗ приводим уравнение к равносильному линейному:  $x - a = 0$ . Его решение  $x = a$ . Условие  $x \neq -2$  влечет за собой требование  $a \neq -2$ .

*Ответ:*  $x = a$  при  $a \neq -2$ ;  $0$  при  $a = -2$ .

**Пример 2.** Решить уравнение  $\frac{x+a}{x^2-5x-6} = 0$

*Решение.* При  $x \neq -1$  и  $x \neq 6$  уравнение имеет решение  $x = -a$ . Из условия  $x \neq -1$  и  $x \neq 6$  следует, что  $a \neq 1$  и  $a \neq -6$ .

*Ответ:*  $x = -a$  при  $a \neq -6$  и  $a \neq 1$ ;  $0$  при  $a \in \{-6; 1\}$ .

**Пример 3.** Решить уравнение  $\frac{a-3}{x} = \frac{a}{x-3}$ .

*Решение.* При  $x \neq 0$  и  $x \neq 3$  уравнение сводится к линейному  $(a-3)(x-3) = ax \Leftrightarrow x = a+3$ . Из условия  $x \neq 0$  и  $x \neq 3$  следует, что  $a \neq -3$  и  $a \neq 0$ .

*Ответ:*  $x = a+3$  при  $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; \infty)$ ;  $0$  при  $a \in \{-3; 0\}$

**Пример 4.** Решить уравнение  $\frac{x-3}{x+2} + \frac{4}{a-1} = \frac{2}{(a-1)(x-2)}$

*Решение.* Уравнение имеет смысл при  $a \neq 1$  и  $x \neq -2$ . Учитывая ОДЗ, приведем уравнение к линейному  $(a-1)(x-3) + 4(x-2) = 2 \Leftrightarrow x(a+3) = 3(a-3)$  При  $a = -3$  уравнение решений не имеет.

Если  $a \neq -3$ , то  $x = \frac{3(a-3)}{a+3}$ . Исключим теперь значение  $a$ , при котором  $x = -2$ .

$$-2(a+3) = 3(a-3) \Leftrightarrow 5a = 3, a = \frac{3}{5}$$

*Ответ:*  $x = \frac{3(a-3)}{a+3}$  при  $a \neq -3, a \neq \frac{3}{5}, a \neq 1$ ;  $0$  при  $a \in \{-3; \frac{3}{5}; 1\}$ .

**Пример 5.** Решить уравнение  $\frac{2}{ax+2} = \frac{1}{2x-a}$ .

*Решение.* Допустимые значения,  $x$  и  $a$  те, при которых  $ax+2 \neq 0$  и  $2x-a \neq 0$ , т.е.  $ax \neq -2$  и  $2x \neq a$ . Упростим уравнение при допустимых значениях  $a$  и  $x$ , получим

$4x+2a = ax+2 \Leftrightarrow x(a-4) = 2(a-1)$ . При  $a = 4$  уравнение решений не имеет. Если же  $a \neq 4$ ,

то  $x = \frac{2(a-1)}{a-4}$ . Исключим теперь те значения  $a$ , при которых  $ax = -2$  или  $2x = a$ .

$$ax = -2 \Leftrightarrow \frac{2a(a-1)}{a-4} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = -a + 4 \\ a \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Эти же значения  $a$  получим, решая уравнение  $2x = a$ . Действительно,

$$2x = a \Leftrightarrow \frac{4(a-1)}{a-4} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-4 = -a^2+4a \\ a \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 2$$

*Ответ:*  $x = \frac{2(a-1)}{a-4}$  при  $a \neq \pm 2, a \neq 4$ ;  $0$  при  $a \in \{\pm 2; 4\}$



**Пример 6.** Решить уравнение  $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

*Решение.* Уравнение имеет смысл при всех  $x \neq \pm 1$ . С учетом ОДЗ приведем уравнение к равносильному:

$(ax-1)(x+1) + b(x-1) = a(x^2+1) \Leftrightarrow x(a+b-1) = a+b+1$ . Если  $a+b=1$ , то уравнение

решений не имеет. При  $a+b \neq 1$   $x = \frac{a+b+1}{a-b-1}$ . Из условия  $x \neq -1$  следует,  $a+b+1 \neq -(a+b-1)$

т.е.  $a+b \neq 0$ . Равенство  $x=1$ , т.е.  $a+b+1 = a+b-1$  не выполняется ни при каких значениях  $a$  и  $b$ .

*Ответ:*  $x = \frac{a+b+1}{a-b-1}$  при  $a-b \neq 0, a+b \neq 1$ ;  $\emptyset$  при  $a+b=0$  или  $a+b=1$

**Пример 7.** Решить уравнение  $\frac{a}{2a-x} = \frac{3}{b-x}$

*Решение.* При  $2a-x \neq 0$  и  $b-x \neq 0$  - уравнение

$$\frac{a}{2a+x} = \frac{3}{b-x} \quad (1)$$

примет вид

$$ab - ax = 6a - 3x \Leftrightarrow a(b-6) = x(a+3) \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет единственное решение  $x = \frac{a(b-6)}{a+3}$  при  $a \neq -3$ .

Если же  $a = -3$ , то уравнение имеет решение только при  $b = 6$  ( $x \in R$ ).

Определим теперь те значения  $a$  и  $b$ , при которых  $x = -2a$  и  $x = b$ .

Подставим  $x = -2a$  в уравнение (2). Получим  $a(b-6) = -2a(a+3) \Leftrightarrow a(b+2a) = 0$ , откуда  $a = 0$  или  $b = -2a$ .

При  $x = b$  уравнение (2) примет вид  $a(b-6) = b(a+3) \Leftrightarrow b = -2a$ .

Найденные значения  $a$  и  $b$  подставляем в уравнение (1).

1.  $a = 0$ . Уравнение  $0 = \frac{3}{b-x}$  решений не имеет.

2.  $b = -2a$ . Уравнение  $\frac{a}{2a+x} = \frac{-3}{2a-x}$ , не имеет решений при  $a \neq -3$  и имеет бесконечно много решений при  $a = -3$ ,  $b = 6$  ( $x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$ )

*Ответ:*  $x = \frac{a(b-6)}{a+3}$  при  $a \neq -3, a \neq 0, b \neq -2a$ ;  $x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$  при  $a = -3, b = 6$ ;

$\emptyset$  при  $a = 0, a = -3, b \neq 6, b = -2a, a \neq -3$ .

## 6. Квадратные уравнения с параметром.

1. Если второй коэффициент ( $b$ ) четный ( $b=2k$ ), то для нахождения корней удобно пользоваться формулами:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \quad a \neq 0$$

2. Старайтесь по возможности «работать» с квадратным трехчленом, у которого старший коэффициент  $a$  положителен. Этого всегда можно добиться при решении уравнений, неравенств с числовыми коэффициентами.

Если  $a=0$ , то уравнение  $ax^2+bx+c=0$  является линейным;  
 $bx+c=0$ .

Если  $b=0$  и  $c=0$ , то решением уравнения  $ax^2+bx+c=0$  является любое действительное число.

Если  $b \neq 0$ , то единственное число  $x = -\frac{c}{b}$ .

Рассмотрим пример решения уравнения.

! Определить все значения параметра  $a$ , при котором уравнение  $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a+1 = 0$  имеет один корень.

Если  $a = 0$ , то данное уравнение является линейным  $-4x - 1 = 0$  с единственным корнем  $x = -\frac{1}{4}$ .

Если  $a \neq 0$ , то исходное уравнение является квадратным и имеет единственное решение при  $D=0$ .

Так как второй коэффициент четен ( $k = -2(a+1)$ ), то

$$\frac{D}{4} = 4(a+1)^2 - 2a(4a+1) = 4a^2 - 8a + 4 - 8a^2 - 2a = -4a^2 - 10a + 4$$

$$2a^2 + 5a - 2 = 0,$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = 2.$$

Ответ:  $0; -\frac{1}{2}; 2$ .

**Определение.** Квадратный трехчлен, у которого первый коэффициент равен единице, называется приведенным квадратным трехчленом.

Общепринято второй коэффициент приведенного квадратного трехчлена обозначать  $p$ , а его свободный член  $q$ , т. е. приведенный квадратный трехчлен имеет вид  $x^2 + px + q$ .

Квадратное уравнение вида  $x^2 + px + q = 0$  называется приведенным квадратным уравнением.

## Занятие 2. Неполные квадратные уравнения.

1. Если  $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ , то квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет вид  $ax^2 + c = 0$ .

Так как  $a \neq 0$ , то  $x^2 = -\frac{c}{a}$ , при условии  $-\frac{c}{a} > 0$  имеем:  
 $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ , т.е.  $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ,  $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

Следовательно, если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$   $b = 0$ ,  $c \neq 0$  и уравнение имеет корни, то они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

2. Если  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c = 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет вид  $ax^2 + bx = 0$ .

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$x = 0 \text{ и } ax + b = 0.$$

В этом случае уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два корня:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Таким образом, если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) свободный член равен нулю, то такое квадратное уравнение обязательно имеет нулевой корень.

Рассмотрим примеры решения уравнений.

2. Определите, при каких значениях  $k$  один из корней уравнения  $x^2 + (k-1) \cdot x + k^2 - 4 = 0$  равен нулю.

Если свободный член равен нулю, то один из корней уравнения  $x^2 + (k-1) \cdot x + k^2 - 4 = 0$  будет нулевой.

Следовательно, если  $k = 2$  или  $k = -2$ , то данное уравнение имеет один корень, равный нулю.

Ответ: 2; -2.

3. Определите, при каких значениях  $n$  уравнение  $x^2 - 4x - 1 - nx + 2n = 0$  имеет корни, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

Запишем квадратный трехчлен, стоящий в левой части, в стандартной канонической форме:  $x^2 - (4x - 1) - nx + 2n = 0$

Для выполнения поставленной задачи должны выполняться условия:  $\begin{cases} 4+n=0, (A) \\ 2n-1<0, (B) \end{cases}$

Условие (A):  $n = -4$  удовлетворяет условию (B):  $n < \frac{1}{2}$ . Значит, при  $n = -4$  данное уравнение имеет корни, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку.

Ответ: -4.

4. Решите уравнение  $y(p-1)(py-4)=0$

Если  $p=1$ , то  $y \in R$ .

Если  $p \neq 1$ , то уравнение  $y(py-4)=0$  равносильно совокупно-

сти уравнений: 
$$\begin{cases} y' = 0, \\ py = 4. \end{cases}$$

Если  $p=0$ , то второе уравнение совокупности не имеет корней и решением совокупности будет  $y=0$ .

Если  $p \neq 0$ , то  $y=0$  или  $y = \frac{4}{p}$ .

Ответ: если  $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , то  $y=0$ ,  $y = \frac{4}{p}$ ;

если  $p=0$  то  $y=0$ ; если  $p=1$ , то  $y \in R$ .

#### Уравнения для самостоятельной работы

1.  $8x^2 - 0,2 = 0$

2.  $(10 - a)x^2 - 1 = 0$

3.  $(m+2)x^2 - mx - 3x = 0$

4.  $x(ax-2)=0$

#### Занятие 3. Теорема Виета.

*Теорема.* Для того чтобы числа  $x_1$  и  $x_2$  были корнями уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), необходимо и достаточно выполнения

равенств: 
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Здесь сформулированы два утверждения – прямое и обратное.

5. Не решая уравнения  $x^2 - (2a+1)x - a^2 + 2 = 0$ , найдите, при каком  $a$  один из корней в два раза больше другого.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  - корни исходного уравнения. По условию  $x_1 = 2x_2$ . Чтобы найти корни  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющие условию задачи, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} D > 0, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2a + 1, \\ x_1 x_2 = a^2 - 2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 7 > 0, \\ x_2 = \frac{2a+1}{3}, \\ x_2^2 = \frac{a^2+2}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ \frac{a^2+2}{2} = \frac{4a^2-4a+1}{9}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ a = 4. \end{cases}$$

Ответ: 4.

6. При каком значении параметра  $a$  сумма обратных величин действительных корней уравнения  $2x^2 - 2ax - a^2 - 2 = 0$  равна  $\frac{2}{3}$ ?

Корни исходного уравнения могут существовать при условии  $\frac{D}{4} \geq 0$  или  $a^2 - 2(a^2 - 2) \geq 0$ ,  $-a^2 + 4 \geq 0$ ,  $a^2 - 4 \leq 0$ ,  $-2 \leq a \leq 2$ .

Пусть  $x_1, x_2$  - корни данного уравнения. Согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 - 2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

По условию:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{3}$

Используя равенства (1), имеем:  $\frac{2a}{a^2 - 2} = \frac{2}{3}; \quad a^2 - 3a - 2 = 0$

Следовательно, сумма обратных величин действительных корней

заданного уравнения равна  $\frac{2}{3}$  при условии  $\begin{cases} a^2 - 3a - 2 = 0, \\ -2 \leq a \leq 2; \end{cases}$  или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \\ x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \\ -2 \leq a \leq 2. \end{cases}$$

$$a = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

Ответ:

7. Найдите все значения  $a$ , при которых сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - ax + a + 7 = 0$  равна 10

Корни исходного уравнения существуют, если  $D \geq 0$  или  $a^2 - 4(a + 7) \geq 0$ ,  $a^2 - 4a - 28 \geq 0$ ,  $a \in [-\infty; -2 - 4\sqrt{2}] \cup [2 + 4\sqrt{2}; +\infty)$ .

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни данного уравнения. Запишем для них

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 \cdot x_2 = a + 7. \end{cases}$$

теорему Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a + 7).$$

По условию сумма этих квадратов равна 10:

$$a^2 - 2a - 14 = 10, \quad a^2 - 2a - 24 = 0,$$

$$a = 6 \quad \text{или} \quad a = -4.$$

При  $a = 6$  дискриминант исходного уравнения отрицателен. Следовательно,  $a = -4$ .

Ответ:  $a = -4$ .

#### Задания для самостоятельной работы

5. При каких значениях  $n$  каждое из следующих уравнений не имеет действительных корней?

а)  $x^2 - 8x + 2n = 0$ ;

б)  $4x^2 + 3nx + 36 = 0$ ;

в)  $\frac{4}{5}nx^2 - x + 5n = 0$ ;

г)  $(n-1)x^2 + nx + n+1 = 0$ .

6. При каких значениях  $a$  уравнение  $(a-1)x^2 + 2(a+1)x + a-2=0$  имеет один корень?

7. При каких значениях  $m$  только один из корней уравнения равен нулю?

а)  $2x^2 + mx + 2m^2 - 3m = 0$ ;

б)  $x^2 + (m-3)x + m-3 = 0$ .

8. При каких значениях  $k$  каждое из следующих уравнений имеет два различных действительных корня?

а)  $x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ ;

б)  $kx^2 + 2(k+1)x + k-3 = 0$ ,

в)  $(k-4)x^2 + 2(k-2)x - k = 0$ .

#### Занятие 4. Знаки корней квадратного уравнения.

Теорема Виета очень часто используется в данных задачах. Однако в некоторых случаях можно указать и другие способы, которые основываются на графических иллюстрациях.

Практический совет – в процессе решения почаще обращаться к «картинкам», искать соответствующую графическую интерпретацию

8. При каком  $a$  уравнение  $(a+5)x^2 + (2a-3)x + a-10 = 0$  имеет два различных отрицательных корня?

Первый способ:

$$a+5 \neq 0, \quad a \neq -5$$

$$D = (2a-3)^2 - 4(a+5)(a-10) = 8a + 209 > 0$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$$

Оба корня будут отрицательными, если

Таким образом, задача свелась к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 8a + 209 > 0, \\ \frac{a-10}{a+5} > 0, \\ \frac{2a-3}{a+5} > 0 \end{cases}$$

Ответ:  $\left(-\frac{209}{8}; -5\right) \cup (10; +\infty)$

Второй способ:

Пусть  $f(x) = (a+5)x^2 + (2a-3)x + a-10$ .

Для того чтобы оба корня были отрицательны, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1)  $D > 0$ ;      2)  $(a+5)f(0) > 0$ ;      3)  $x_0 < 0$ .

$$D = 8a + 209; \quad f(0) = a - 10; \quad x_0 = \frac{2a-3}{2(a+5)}.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 8a + 209 > 0, \\ (a+5)(a-10) > 0, \\ \frac{2a-3}{a+5} > 0. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(-\frac{209}{8}; -5\right) \cup (10; +\infty)$

9. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 - 2\sqrt{3}(a-3)x + a^2 - 3a - 2 = 0$  имеет два действительных различных корня? Определите знаки корней в зависимости от  $a$ .

а)  $\frac{D}{4} = (\sqrt{3}(a-3))^2 - a^2 - 3a - 2 = 2a^2 - 15a + 25$

Если  $2a^2 - 15a + 25 > 0$ , то уравнение имеет два различных действительных корня, т.е. если  $a < \frac{5}{2}$  или  $a > 5$ .

б) Так как  $x_1 x_2 = a^2 - 3a - 2$  по теореме Виета, то если  $a^2 - 3a + 2 < 0$ ,  $1 < a < 2$ , уравнение имеет корни разных знаков (дискриминант при этом «автоматически» положителен).

Для того чтобы  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

Решив систему 
$$\begin{cases} 2a^2 - 15a + 25 > 0, \\ a^2 - 3a + 2 > 0, \\ a - 3 > 0, \end{cases}$$

получим  $a > 5$ .

Уравнение имеет два различных корня, если  $a < \frac{5}{2}$  или  $a > 5$ .  
при этом если  $a > 5$ , то  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ , а при  $1 < a < 2$   $x_1 < 0$  и  $x_2 < 0$ , то при  $a = 1$  или  $2 < a < \frac{5}{2}$   $x_1 < 0$  и  $x_2 < 0$ .

в)  $D = 0$  при  $a = 5$  или  $a = \frac{5}{2}$ .

Если  $a = 5$ , то  $x_1 = x_2 > 0$ ; если  $a = \frac{5}{2}$ , то  $x_1 = x_2 < 0$ .

г) Рассмотрим случай, когда уравнение имеет один нулевой корень, т.е. когда свободный член равен нулю:  $a^2 - 3a - 2 = 0$ . Если  $a = 1$  или  $a = 2$ , то  $x_1 < 0$  и  $x_2 = 0$ .

Ответ:  $a < \frac{5}{2}$  или  $a > 5$ .

Если  $a = 1$  или  $2 < a < \frac{5}{2}$ , то  $x_1 < 0$  и  $x_2 < 0$ ;

если  $a = 1$  или  $a = 2$ , то  $x_1 < 0$ ,  $x_2 = 0$ ;

если  $1 < a < 2$  то  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ ;

если  $a = \frac{5}{2}$ , то  $x_1 = x_2 < 0$ ;

если  $\frac{5}{2} < a < 5$ , то корней нет;

если  $a = 5$ , то  $x_1 = x_2 > 0$ ;

если  $a > 5$ , то  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ .

#### Задания для самостоятельной работы

16. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $(a - 1)x^2 + 2ax - a + 3 = 0$  одного знака.

17. При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет два различных корня? Определите знаки этих корней в зависимости от  $a$ .

а)  $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ ;

б)  $(a - 3)x^2 - 2(3a - 4)x + 7a - 6 = 0$ ;

в)  $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ ;



$$\text{г) } x^2 + 2x - 8 = (x - 4) a;$$

$$\text{д) } (3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0.$$

**Занятия 5-6. Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.**

Выделим прежде всего два наиболее распространенных типа задач, связанных с расположением корней квадратного трехчлена.

Первый тип – задачи, в которых изучается расположение корней относительно заданной точки.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) = ax^2 + b + c$  – квадратичная функция,  $x_1, x_2$  – действительные корни,  $N$  – какое-нибудь действительное число. Для того чтобы корни квадратного трехчлена были меньше чем число  $N$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < N, \\ af(N) > 0. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число  $M$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \\ af(M) > 0. \end{cases}$$

**Теорема 3.** Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число  $K$ , а другой больше числа  $K$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $af(K) < 0$ .

Второй тип – задачи, в которых исследуется расположение корней квадратного трехчлена относительно числового промежутка.

**Теорема 4.** Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число  $M$ , но меньше, чем число  $N$  ( $M < N$ ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ af(M) > 0, \\ af(N) > 0, \\ M < -\frac{b}{2a} < N. \end{cases}$$

**Теорема 5.** Для того чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале  $MN$  ( $M < N$ ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} af(M) < 0, \\ af(N) > 0. \end{cases}$$

**Теорема 6.** Для того чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале  $MN$  ( $M < N$ ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} af(M) > 0, \\ af(N) < 0. \end{cases}$$

**Теорема 7.** Для того чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем  $N$ , а другой больше, чем  $N$  ( $M < N$ ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} af(M) < 0, \\ af(N) < 0. \end{cases}$$

**Пример 1.** При каких  $m$  уравнение  $x^2 - (2m - 1)x + 3m - 4 = 0$  имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой больше 2?

*Решение.* Так как  $a = 1$ , то условие  $af(2) < 0$  равносильно  $f(2) < 0$ . Решая неравенство  $4 - (2m + 1) \cdot 2 + 3m - 4 < 0 \Leftrightarrow -m - 2 < 0$ , получаем  $m > -2$ .

*Ответ:*  $m > -2$ .

**Пример 2.** При каких  $m$  уравнение  $mx^2 - (3m - 2)x + m - 3 = 0$  имеет корни разных знаков?

*Решение.* Эту задачу можно переформулировать следующим образом: при каких  $m$  число 0 лежит между корнями уравнения? Решая неравенство  $mf(0) < 0 \Leftrightarrow m(m - 3) < 0$ , получаем  $m \in (0; 3)$ .

*Ответ:*  $m \in (0; 3)$ .

**Пример 3.** При каких  $m$  один из корней уравнения  $(m^2 - 2)x^2 + (m^2 + m - 1)x - m^3 + m^2 = 0$  меньше  $m$ , а другой больше  $m$ ?

*Решение.* Имеем  
 $af(2) < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)((m^2 - 2)m^2 + (m^2 + m - 1)m - m^3 - m^2) < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)(m^4 - m) < 0 \Leftrightarrow$   
 $(m^2 + m + 1)(m - \sqrt{2})(m(m - 1)(m - \sqrt{2})) < 0$

Решая неравенство методом интервалов, получаем, что  $m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2})$ .

Ответ:  $m \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2})$ .

**Пример 4.** При каких  $m$  только один корень квадратного трехчлена  $x^2 - 3(m - 1)x + 12m - 4$  больше 3?

*Решение.*  $x_1 = 4$  и  $x_2 = 3m - 1$  - корни квадратного трехчлена. Так как  $x_1 = 4 > 3$  и по условию таким свойством должен обладать только один корень, то  $x_2 \leq 3$ . Кроме того, нельзя исключать случаи

$x_1 = x_2$ . Решая совокупность 
$$\begin{cases} 3m - 1 \leq 3 \\ 4 = 3m - 1 \end{cases}$$

находим  $m \in \left\{\frac{5}{3}\right\} \cup \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$ .

Ответ:  $m \in \left\{\frac{5}{3}\right\} \cup \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$ .

**Пример 5.** При каких  $m$  все корни уравнения  $x^2 - (3m + 1)x + (2m^2 + 4m - 6) = 0$   
 а) больше 1; б) меньше -1?

*Решение.* а) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 1)^2 - 4(2m^2 + 4m - 6) \geq 0 \\ \frac{1}{2}(3m + 1) > 1 \\ 1 - (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 5)^2 \geq 0 \\ m > \frac{1}{3} \\ (2m - 3)(m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; +\infty) \\ m \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \\ m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

получаем  $m \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

б) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; +\infty) \\ \frac{1}{2}(3m + 1) < -1 \\ 1 + (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases}$$

получаем  $m \in (-\infty; -4)$ .

**Пример 6.** При каких  $m$  корни уравнения  $mx^2 - (2m+1)x + 3m-1 = 0$  больше 1?

*Решение.* Из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 1 \\ mf(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4m(3m-1) \geq 0 \\ \frac{2m+1}{2m} > 1 \\ m(m - (2m+1) + 3m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 - 8m - 1 \leq 0 \\ \frac{1}{2m} > 0 \\ 2m(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \in \left[ \frac{1}{4}(2 - \sqrt{6}), \frac{1}{4}(2 + \sqrt{6}) \right] \\ m \in (0; -\infty) \\ m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

следует, что  $m \in \left[ 1; \frac{1}{4}(2 + \sqrt{6}) \right]$ .

**Пример 7.** При каких  $m$  корни уравнения  $x^2 + 2mx + 8 = 0$  отрицательны?

*Решение.* Из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 \geq 0 \\ -m < 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \quad \text{находим, что } m \in [2\sqrt{2}; +\infty)$$

*Ответ:*  $m \in [2\sqrt{2}; +\infty)$ .

#### Упражнения.

1. При каких  $m$  уравнение  $(m-2)x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m + 2 = 0$  имеет два корня, один из которых меньше -1, а другой больше -1?
2. При каких  $m$  уравнение  $mx^2 + (2m-1)x + m^2 - 6m - 8 = 0$  имеет корни разных знаков?
3. При каких  $m$  один из корней уравнения  $(m^2-1)x^2 - (3m-1)x - m^2 = 0$  меньше  $m$ , а другой больше  $m$ ?
4. При каких  $m$  корни уравнения  $(m-1)x^2 - 2(m+2)x + m + 13 = 0$  больше 2?
5. При каких  $m$  корни уравнения  $x^2 - 4mx + 3 = 0$  положительны?
6. При каких  $m$  корни уравнения  $mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 2 = 0$  отрицательны?
7. При каких  $m$  корни уравнения  $x^2 + 2x + m = 0$  больше  $m$ ?
8. При каких  $m$  любое решение уравнения  $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$  удовлетворяет условию  $-1 < x < 5$ ?
9. При каких  $m$  только один корень уравнения  $x^2 + mx + 4 = 0$  удовлетворяет условию  $-3 < x < -1$ ?

10. При каких  $m$  корни уравнения  $(m+2)x^2 + (m-1)x - m = 0$  удовлетворяют условию  $x_1 < 1, x_2 > 3$ ?
11. При каких  $m$  корни уравнения  $x^2 + (2m-2)x + m^2 - 2m - 3 = 0$  удовлетворяют условию  $-3 < x_1 < -1, 1 < x_2 < 3$ ?
12. При каких  $m$  уравнение  $mx^2 - (3m+2)x + 2(m+1) = 0$  имеет решение, большее 1?
13. При каких  $m$  корни уравнения  $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - m - 3 = 0$  находятся между корнями уравнения  $x^2 - (5m-1)x + 6m^2 - m - 2 = 0$ ?
14. При каких  $m$  между корнями уравнения  $x^2 - (7m-3)x + 12m^2 - 13m - 4 = 0$  находится ровно один корень уравнения  $x^2 - (5m-2)x + 6m^2 - m - 15 = 0$ ?

## 7. Наименьшее и наибольшее значения функции.

Так как выражение  $ax^2 + bx + c, a \neq 0$  можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ то отсюда следует:}$$

а) если  $a > 0, x \in R$   $\min (ax^2 + bx + c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$  при  $x = -\frac{b}{2a}$ ;

б) если  $a < 0, x \in R$   $\max (ax^2 + bx + c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$  при  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Рассмотрим примеры решения заданий.

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 3x^2 + 6x + 7$ .

Имеем  $3x^2 + 6x + 7 = 3(x+1)^2 + 4$ ,  $\min_x (3x^2 + 6x + 7) = 4$  при  $x = -1$ . Так как функция  $y = 3x^2 + 6x + 7$  не является ограниченной сверху, то наибольшего значения она не имеет.

Наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  принято обозначать через  $\max_{x \in [a; b]} f(x)$ , а наименьшее - через  $\min_{x \in [a; b]} f(x)$ .

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^2 + x$  на отрезке  $[-2; 5]$ .

Имеем:  $y = x^2 + x = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$ .

$$\left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right), -\frac{1}{2} \in [-2; 5]$$

Координаты вершины параболы  $\left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right)$ . Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции могут достигаться либо на концах отрезка  $[-2; 5]$ , либо в точке  $x = -\frac{1}{2}$ .

Вычислим  $y(-2)$ ,  $y(-\frac{1}{2})$ ,  $y(5)$ :

$$y(-2)=2, \quad y(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}, \quad y(5)=30.$$

Таким образом:

$$\max_{x \in [-2; 5]} y(x) = y(5) = 30; \quad \min_{x \in [-2; 5]} y(x) = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$$

Самостоятельно выполните графическую иллюстрацию.

16. Найдите  $x$ , при котором

$$\min_a (a^2 - 2ax + 3x) = \max_b (-b^2 + 4bx - 3x^2 + 1).$$

В квадратном трехчлене  $a^2 - 2ax + 3x$  относительно  $a$  выделим полный квадрат:  $a^2 - 2ax + x^2 - x^2 + 3x = (a-x)^2 - x^2 + 3x$ .

$$\min_a (a^2 - 2ax + 3x) = -x^2 + 3x.$$

В квадратном трехчлене  $-b^2 + 4bx - 3x^2 + 1$  относительно  $b$  выделим полный квадрат:

$$-(b^2 - 2 \cdot 2x \cdot b + 4x^2 - 4x^2 + 3x^2 - 1) = -((b-2x)^2 - x^2 - 1) = -(b-2x)^2 + x^2 + 1.$$

$$\max_b (-b^2 + 4bx - 3x^2 + 1) = x^2 + 1.$$

Решим уравнение:  $-x^2 + 3x = x^2 + 1$ ,  
 $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ ,  
 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ .

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1.$$

17. Изобразите точки с координатами  $(x, y)$ , для которых выполняется равенство:  $\min_x (x^2 + 2xy - y^2) = \max_y (-x^2 - 2xy - 2y^2)$ .

Имеем:  $x^2 + 2xy - y^2 = (x+y)^2 - 2y^2$ ,  
 следовательно,

$$\min_x (x^2 + 2xy - y^2) = -2y^2, \quad -x^2 - 2xy - 2y^2 = -2\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{2},$$

$$\text{т.е. } \max_y (-x^2 - 2xy - 2y^2) = -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Имеем: } -2y^2 = -\frac{x^2}{2}; \quad y = \pm \frac{x}{2}.$$

Искомое множество состоит из двух прямых:  $y = \frac{x}{2}$  и  $y = -\frac{x}{2}$ .

### Задания для самостоятельной работы

36. Для каких значений параметра  $a$  наименьшее значение функции  $y = x^2 - (a + 2)x + a^2$  на отрезке  $[-1; 1]$  равно 4?

37. Найдите  $x$ , при котором

$$\max_b \min_a (a^2 - 2ab - b^2 - 2ax + 10bx) = 7.$$

38. Определите знак  $c$ , если  $a+b+c < 0$  и уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет корней.

39. Изобразите все точки с координатами  $(x, y)$ , для которых выполняется равенство:

а)  $\max_b \min_a (a^2 - b^2 - 2ab + 2ax + 2b + y) = 1;$

б)  $\min_a \max_b (a^2 - b^2 - 2ab + 2ax + 2b + y) = 1.$

40. При каком значении параметра  $a$  квадрат разности корней уравнения  $x^2 - ax + a - 6 = 0$  будет наименьшим? Чему равен квадрат этой разности?

41. При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - ax + a - 2 = 0$  будет наименьшей?

42. Парабола  $y = x^2 + px + q$  пересекает прямую  $y = 2x - 3$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ . При каком значении  $p$  и  $q$  расстояние от вершины параболы до оси  $OX$  минимально?

# 1. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

**Задача 1.1.** (ЦТ) При каком значении параметра  $a$  парабола  $y = 4ax^2 - 8x + 25$  имеет с осью  $Ox$  две общие точки?

*Решение.*

Данный квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 4a \neq 0 \\ \frac{D}{4} = 16 - 100a > 0. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$ .

*Ответ:*  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{25})$ .

**Задача 1.2.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  квадратный трехчлен  $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k+7$  можно представить в виде полного квадрата?

*Решение.*

Квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  можно представить в виде  $a(x - x_0)^2$ , если его корни равны  $x_1 = x_2 = x_0$ , т.е.  $D = 0$ . В данном случае  $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0$ . Решая последнее уравнение, получим  $k = -\frac{22}{3}$  и  $k = 2$ .

*Ответ:*  $k = -\frac{22}{3}; k = 2$ .

**Задача 1.3.** (ЦТ) Найдите значение параметра  $a$ , при которых неравенство  $(2a+1)x^2 + (a+2)x + \frac{3}{4} \geq 0$  выполняется при всех  $x$ .

*Решение.*

График квадратного трехчлена  $y = ax^2 + bx + c$  расположен не ниже оси  $Ox$  при выполнении условий:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0. \end{cases}$$

В данной задаче эти условия имеют вид

$$\begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ (a + 2)^2 - 3(2a + 1) \leq 0. \end{cases}$$

Решением последней системы является  $a = 1$ .

*Ответ:*  $a = 1$ .

**Задача 1.4.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  все корни уравнения  $ax^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$  отрицательны?

*Решение.*



При  $a = 0$  уравнение имеет один корень  $x = -\frac{3}{2}$ , который удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим случай  $a \neq 0$ . Для того, чтобы оба корня уравнения были отрицательны, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0. \end{cases}$$

Применяя теорему Виета, запишем эти условия в виде:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (a+1)^2 - a(a-3) \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a-3}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2(a+1)}{a} < 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что  $a \in [-\frac{1}{5}; 0)$ . Ответ задачи объединяет два случая.

*Ответ:*  $a \in [-\frac{1}{5}; 0]$ .

**Задача 1.5.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  все корни уравнения  $ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$  больше 1?

*Решение.*

При  $a = 0$  уравнение имеет один корень  $x = -1$ , который требованиям задачи не удовлетворяет.

Рассмотрим случай  $a \neq 0$ . Заметим, что способ решения задачи 1.4. не может быть применим в данном случае, т.к. сравнение суммы и произведения корней с 1 являются необходимыми, но не достаточными условиями.

Опишем общий способ решения подобных задач. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$  были больше числа  $d$ , необходимо и достаточно выполнения условий (см. рис. 1):

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} > d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

Аналогично, требование того, чтобы корни были меньше числа  $d$ , означает выполнение условий

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} < d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

В данной задаче условия записываются в виде

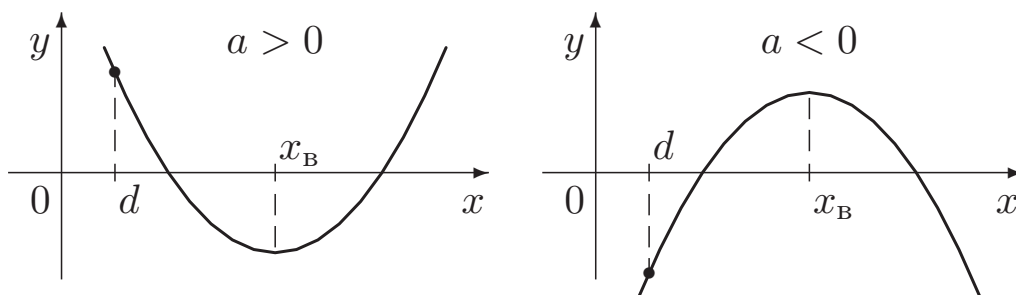


Рис. 1:

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0 \\ \frac{2a+1}{2a} > 1 \\ a(a-2a-1+3a-1) > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что  $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$ .

Очевидно, что тот же результат мы получили бы и решая неравенство  $x_1 > 1$ , где  $x_1$  — меньший корень уравнения, однако такой способ является более сложным.

Ответ:  $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$ .

**Задача 1.6.** При каких значениях параметра  $a$  корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a+3 = 0$  удовлетворяют условиям  $x_1 < -1 < x_2 < 1$ ?

Решение.

Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра  $a$  только один (большой) корень квадратного трехчлена  $f(x) = (3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a+3$  принадлежит интервалу  $(-1; 1)$ , а другой корень меньше  $-1$ ?

Из рис. 2 видно, что условием выполнения требований задачи является система

$$\begin{cases} (3a+2) \cdot f(-1) < 0 \\ (3a+2) \cdot f(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3a+2)(3a+2-a+1+4a+3) < 0 \\ (3a+2)(3a+2+a-1+4a+3) > 0. \end{cases}$$

Решением системы является интервал  $a \in (-1; -\frac{2}{3})$ .

Ответ:  $a \in (-1; -\frac{2}{3})$ .

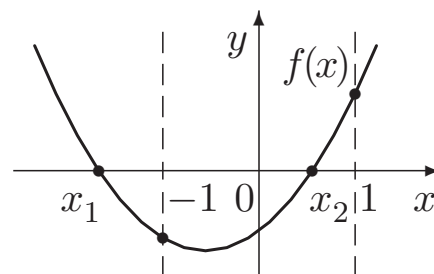


Рис. 2:

**Задача 1.7.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $x^2 - 2(a-2)x + a - 2 \leq 0$  имеет решения и все они являются решениями неравенства  $x^2 + 9|x| - 10 \leq 0$ .

*Решение.*

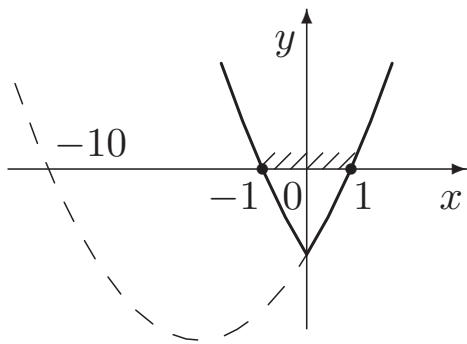


Рис. 3:

Второе неравенство лучше решать графически (рис. 3), построив график квадратного трехчлена  $y = x^2 + 9|x| - 10$  с учетом четности функции (график симметричен относительно оси  $Oy$ ). Решением второго неравенства является отрезок  $[-1; 1]$ .

Первое неравенство будет иметь решения, если  $D \geq 0$ , причем, так как ветви параболы  $f(x) = x^2 - 2(a-2)x + a - 2$  направлены вверх, решением будет являться отрезок  $[x_1; x_2]$ , где  $x_1, x_2$  — меньший и больший корни.

По условию задачи нужно записать необходимые и достаточные условия того, что  $[x_1; x_2] \in [-1; 1]$  или  $\begin{cases} x_1 \geq -1 \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$

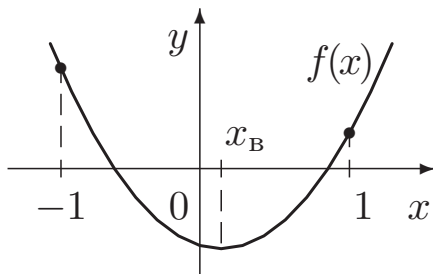


Рис. 4:

Такие условия имеют вид (рис. 4)

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -1 \leq x_{\text{в}} \leq 1 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

или в данном случае

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a-2) \geq 0 \\ -1 \leq a-2 \leq 1 \\ f(-1) = 1 + 2(a-2) + a - 2 \geq 0 \\ f(1) = 1 - 2(a-2) + a - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Решением системы является отрезок  $[\frac{5}{3}; 2]$  и одна точка  $a = 3$ .

*Ответ:*  $a \in [\frac{5}{3}; 2] \cup \{3\}$ .

**Задача 1.8.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $p$  отношение корней уравнения  $2x^2 + (p-10)x + 6 = 0$  равно 12?

*Решение.*

Уравнение имеет действительные корни при  $D \geq 0$ , причем, если  $x_2 = 12x_1$ , то по теореме Виета составим систему

$$\begin{cases} D = (p - 10)^2 - 48 \geq 0 \\ x_2 = 12x_1 \\ x_1 + x_2 = -\frac{p-10}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 - 20p + 52 \geq 0 \\ x_2 = 12x_1 \\ 13x_1 = \frac{10-p}{2} \\ 12x_1^2 = 3 \end{cases}$$

Решением системы являются значения  $p = -3$  и  $p = 23$ .

Ответ:  $p = -3$ ;  $p = 23$ .

**Задача 1.9.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$  имеет ровно 4 различных действительных корня? При каких значениях параметра эти 4 корня образуют арифметическую прогрессию?

*Решение.*

Пологая  $y = x^2$ , получим квадратное уравнение  $y^2 + (a - 5)y + (a + 2)^2 = 0$ .

Первое требование задачи будет выполнено, если это квадратное уравнение имеет 2 различных положительных корня  $y_1 > y_2 > 0$ . Аналогично задаче 1.4 составим систему:

$$\begin{cases} D > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - 5)^2 - 4(a + 2)^2 > 0 \\ 5 - a > 0 \\ (a + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

Решением системы является интервал  $a \in (-9; -2) \cup (-2; \frac{1}{3})$ . При этих значениях параметра  $a$  корни исходного уравнения будут иметь вид  $-\sqrt{y_1}$ ;  $-\sqrt{y_2}$ ;  $\sqrt{y_2}$ ;  $\sqrt{y_1}$ .

Эти значения образуют арифметическую прогрессию, если разность между ними есть постоянное число:

$$d = \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = \sqrt{y_2} - (-\sqrt{y_2}) = -\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}.$$

Отсюда следует, что  $\sqrt{y_1} = 3\sqrt{y_2}$  или  $y_1 = 9y_2$ . Аналогично задаче 1.8 составим по теореме Виета систему

$$\begin{cases} y_1 = 9y_2 \\ y_1 + y_2 = 5 - a \\ y_1 \cdot y_2 = (a + 2)^2, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{решением которой являются} \\ \text{числа } a = -\frac{5}{13} \text{ и } a = -5. \end{array}$$

Ответ:  $a = -\frac{5}{13}$ ;  $a = -5$ .

**Задача 1.10.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x(x^{12} - ax^6 + a^4) = 0$  имеет ровно 5 корней, образующих арифметическую прогрессию?

*Решение.*

Один из корней уравнения очевиден — это  $x = 0$ .

Положим  $y = x^6 > 0$  при  $x \neq 0$ . Тогда уравнение запишется в виде  $f(y) = y^2 - ay + a^4 = 0$ . Это квадратное уравнение будет иметь различные положительные корни, если выполнены условия:

$$\begin{cases} D = a^2 - 4a^4 > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{a}{2} > 0 \\ f(0) = a^4 > 0. \end{cases}$$

Решением системы является интервал  $a \in (0; \frac{1}{2})$ . Запишем теперь условия, при которых корни исходного уравнения образуют арифметическую прогрессию. Пусть  $y_1 > 0$  и  $y_2 > 0$  — корни уравнения после замены. Тогда пятью корнями, образующими арифметическую прогрессию, будут значения  $x$  вида

$$-\sqrt[6]{y_2}; \quad -\sqrt[6]{y_1}; \quad 0; \quad \sqrt[6]{y_1}; \quad \sqrt[6]{y_2},$$

где для определенности считаем  $y_2 > y_1 > 0$ . Тогда, по свойству арифметической прогрессии, ее разность

$$d = \sqrt[6]{y_2} - \sqrt[6]{y_1} = \sqrt[6]{y_1} - 0,$$

откуда  $\sqrt[6]{y_2} = 2\sqrt[6]{y_1}$  или  $y_2 = 64y_1$ .

По теореме Виета из квадратного уравнения  $y^2 - ay + a^4 = 0$  следует:

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = a^4 \\ y_1 + y_2 = a \\ y_2 = 64y_1 \end{cases}$$

Из этой системы находим  $y_1 = \frac{a^2}{8}$ ;  $y_2 = 8a^2$ . Подставляя эти значения во второе уравнение системы, приходим к равенству  $8a^2 + \frac{a^2}{8} = a$ , откуда  $a = \frac{8}{65}$  (значение  $a = 0$  не удовлетворяет требованиям задачи).

*Ответ:* 5 корней при  $a \in (0; \frac{1}{2})$ ; при  $a = \frac{8}{65}$  корни образуют арифметическую прогрессию.

**Задача 1.11.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y_1 = (x - 4)|x| - 1$  и  $y_2 = a$  имеют 3 общие точки?

*Решение.*

Рассмотрим графический способ решения задачи. Построим график функции  $y_1$ , которая имеет вид:

$$y_1 = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 4x - x^2 - 1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 5}).$$

Графиком  $y_2 = a$  является прямая, параллельная оси  $Ox$ . Из рис. 5 видно, что графики функций  $y_1$  и  $y_2$  будут иметь 3 общие точки, если  $a \in (-5; -1)$ .

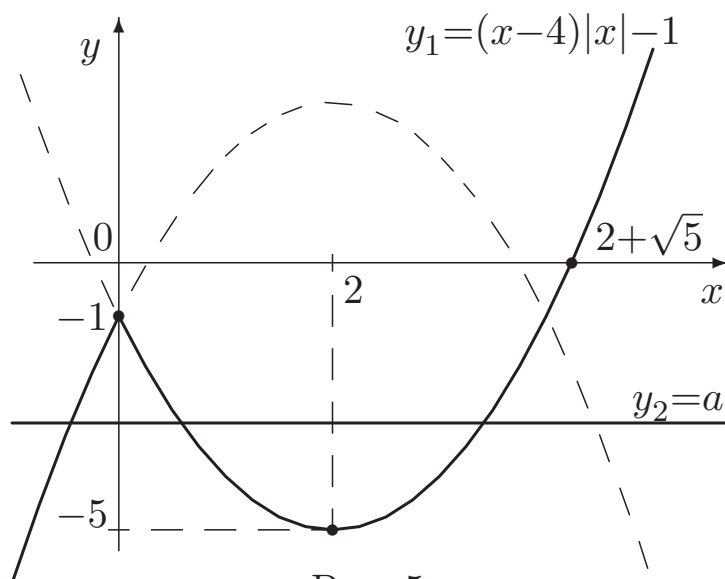


Рис. 5:

При  $a = -1$  и  $a = -5$  графики имеют 2 общие точки, при остальных значениях  $a$  — одну общую точку.

Ответ:  $a \in (-5; -1)$ .

**Задача 1.12.** (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения

$$6x^2 + 2x^3 - 18x + n = 0 \quad \text{в зависимости от параметра } n.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2x^3 + 6x^2 - 18x = -n.$$

Аналогично задаче 1.11 построим на одном чертеже графики функций  $y_2 = -n$  и схематичный график  $y_1 = 2x^3 + 6x^2 - 18x$ . Для этого найдем производную:  $y'_1 = 6x^2 + 12x - 18$  и критические точки  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 1$ . Исследуя знаки производной, нетрудно убедиться, что  $x_1 = -3$  — точка максимума, а  $x_2 = 1$  — точка минимума, причем  $y_{\max}(-3) = 54$ ;  $y_{\min}(1) = -10$ . Функция  $y_1$  возрастает на интервалах  $(-\infty; -3)$  и  $(1; +\infty)$  и убывает на интервале  $(-3; 1)$ .

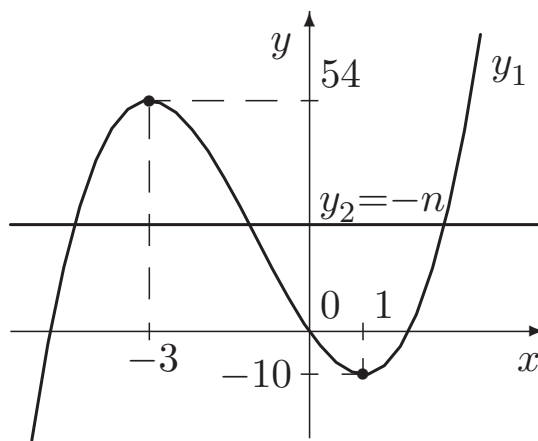


Рис. 6:

Из рис. 6 видно, что исходное уравнение имеет три корня при  $-10 < -n < 54$  или  $-54 < n < 10$ ; два корня при  $n = -54$  и  $n = 10$ ; один корень при  $n < -54$  и  $n > 10$ .

*Ответ:* При  $n \in (-\infty; -54) \cup (10; +\infty)$  один корень,  
при  $n = -54$  и  $n = 10$  два корня,  
при  $n \in (-54; 10)$  три корня.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.13.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  квадратный трехчлен  $y = ax^2 - (a + 4)x + a + 2$  отрицателен при любых значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Задача 1.14.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  квадратный трехчлен  $y = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$  не принимает отрицательных значений?

*Ответ:*  $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ .

**Задача 1.15.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  парабола  $y = (a + 1)x^2 - 3ax + 4a$  имеет с осью  $Ox$  две общие точки?

*Ответ:*  $(-\frac{16}{7}; -1) \cup (-1; 0)$ .

**Задача 1.16.** При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y_1 = 2ax + 1$  и  $y_2 = (a - 6)x^2 - 2$  имеют только одну общую точку?

*Ответ:*  $a = \pm 6; a = 3$ .

**Задача 1.17.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a^2 - a = 0$  имеет более двух корней?

*Ответ:*  $a = 1$ .

**Задача 1.18.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  квадратный трехчлен  $y = x^2 + 2(a + 1)x + 9a - 5$  можно представить в виде полного квадрата?

*Ответ:*  $a = 1; a = 6$ .

**Задача 1.19.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  корни квадратного трехчлена  $y = ax^2 - 3x + 5 - a$  положительны?

*Ответ:*  $(0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}; 5)$ .

**Задача 1.20.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  график квадратного трехчлена  $y = ax^2 + (a - 3)x + a$  имеет общие точки с положительной полуосью  $Ox$  ? <sup>47</sup>

*Ответ:*  $a \in (0; 1]$ .

**Задача 1.21.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  корни квадратного уравнения  $(a - 1)x^2 + ax + 1 = 0$  отрицательны?

*Ответ:*  $a > 1$ .

**Задача 1.22.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  оба корня уравнения  $4a^2x^2 - 8ax + 4 - 9a^2 = 0$  больше 3?

*Ответ:*  $(0; \frac{2}{9})$ .

**Задача 1.23.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых оба корня уравнения  $x^2 + (a - 9)x + a - 1 = 0$  различны и больше 1.

*Ответ:*  $a \in (4, 5; 5)$ .

**Задача 1.24.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых оба корня уравнения  $x^2 + (a - 7)x + a + 8 = 0$  различны и больше 2.

*Ответ:*  $a \in (\frac{2}{3}; 1)$ .

**Задача 1.25.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $b$  корни уравнения  $x^2 - 3x + 2b + 3 = 0$  удовлетворяют условию  $5x_1 + 3x_2 = 23$ ?

*Ответ:*  $b = -15, 5$ .

**Задача 1.26.** В уравнении  $x^2 - 4x + p = 0$  найдите значение параметра  $p$ , если известно, что сумма квадратов его корней равна 14.

*Ответ:*  $p = 1$ .

**Задача 1.27.** При каких значениях параметра  $a$  разность между корнями уравнения  $4x^2 - 16x + a^2 - 2 = 0$  равна 3?

*Ответ:*  $a = \pm 3$ .

**Задача 1.28.** При каких значениях параметра  $p$  один из корней уравнения  $4x^2 - (3 + 2p)x + 2 = 0$  в 8 раз больше другого?

*Ответ:*  $p = -6; \quad p = 3$ .

**Задача 1.29.** При каком положительном значении параметра  $c$  один из корней уравнения  $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$  равен квадрату другого?

*Ответ:*  $c = \frac{1}{3}$ .



**Задача 1.30.** (ЦТ) При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y_1 = |x| \cdot (x-1)$  и  $y_2 = a$  имеют только одну общую точку?

*Ответ:*  $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; +\infty)$ .

**Задача 1.31.** (ЦТ) Найдите число корней уравнения  $|x^2 + ax| = 2a$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0)$  : нет решений,  
если  $a = 0$  : 2 корня,  
если  $a \in (0; 8)$  : 4 корня,  
если  $a = 8$  : 3 корня,  
если  $a \in (8; +\infty)$  : 2 корня.

**Задача 1.32.** При каком значении параметра  $a$  уравнения  $x^2 + ax + 8 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют общий корень?

*Ответ:*  $a = -6$ .

**Задача 1.33.** При каком значении параметра  $a$  любое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$  по модулю не превосходит двух?

*Ответ:*  $a \in [-2; -\frac{1}{2}]$ .

**Задача 1.34.** При каком значении параметра  $a$  корни уравнения  $ax^2 - (a^3 + 2a^2 + 1)x + a(a + 2) = 0$  принадлежат отрезку  $[0; 1]$ ?

*Ответ:*  $a = 0$ .

**Задача 1.35.** При каком значении параметра  $a$  один из корней уравнения  $(a^2 + a + 1)x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$  больше 3, а другой меньше 3?

*Ответ:* нет решений.

**Задача 1.36.** При каких значениях параметра  $a$  корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$  удовлетворяют неравенству  $x_1 < a < x_2$ ?

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ .

**Задача 1.37.** При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $(a + 1)x^2 - 3ax + 4a = 0$  принадлежат интервалу  $(2; 5)$ ?

*Ответ:*  $a \in [-\frac{16}{7}; -2)$ .

**Задача 1.38.** При каких значениях параметра  $a$  один из корней уравнения  $(a - 5)x^2 - 2ax + a - 4 = 0$  меньше 1, а другой больше 2?

*Ответ:*  $a \in (5; 24)$ .

**Задача 1.39.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $x^2 - 2(a + 4)x + 18a \leq 0$  имеет решения и все они являются решениями неравенства  $x^2 - 7|x| - 8 \leq 0$ .

*Ответ:*  $a \in [0; 2]$

**Задача 1.40.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $x^2 - 2(a - 2)x + 4a - 11 \leq 0$  имеет решения и все они являются решениями неравенства  $x^2 - |x| - 6 \leq 0$ .

*Ответ:*  $a \in [\frac{7}{5}; 3] \cup \{5\}$

**Задача 1.41.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^4 + (a - 6)x^2 + (a + 1)^2 = 0$  имеет 4 действительных корня. Определите все  $a$ , при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения  $a$ .

*Ответ:*  $a \in [-8; \frac{4}{3}]$ ;  $a = \frac{8}{13}$ ,  $a = -4$ ;  
 $\div -3; -1; 1; 3$  или  $3; 1; -1; -3$ .

**Задача 1.42** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^5 + (a - 4)x^3 + (a + 3)^2x = 0$  имеет 5 действительных корней. Определите все  $a$ , при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения  $a$ .

*Ответ:*  $a \in [-10; -\frac{2}{3}]$ ;  $a = -\frac{23}{3}$ ,  $a = -1$ ;  
 $\div -2; -1; 0; 1; 2$  или  $2; 1; 0; -1; -2$ .

**Задача 1.43.** При каком значении параметра  $a$  уравнение  $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$  имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию? Найдите эти корни.

*Ответ:*  $a = -8$ :  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = -1$ .

**Задача 1.44.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых ровно один корень уравнения  $x^2 + 2(a - 2)x + 4 - 3a = 0$  удовлетворяет неравенству  $x > 1$ .

*Ответ:*  $a = 0$ ;  $a > 1$ .

**Задача 1.45.** Найдите все значения  $p$  и  $q$ , для которых числа  $p + 2q$  и  $4p + 7q$  являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

*Ответ:*  $(0; 0); (-3; 2); (-\frac{15}{4}; -\frac{9}{4})$ .

**Задача 1.46.** (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения  $-3x^2 + x^3 + 9x = a$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

*Ответ:*  $a \in (-27; -13)$  — 3 корня.

**Задача 1.47.** (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения  $x^3 - 2x + 3 = a$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

*Ответ:*  $a \in (-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 3; \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 3)$  — 3 корня.

**Задача 1.48.** (ЕГЭ) Найдите число корней уравнения  $x^3 - 7x + 5 = a$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

*Ответ:*  $a \in (5 - \frac{14}{9}\sqrt{\frac{7}{3}}; 5 + \frac{14}{9}\sqrt{\frac{7}{3}})$  — 3 корня.

**Задача 1.49.** (ЦТ) Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  удовлетворяет условиям:  $f(-3) > 6$ ;  $f(1) > 7$ ;  $f(2) < 6$ . Что можно сказать о знаках параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ?

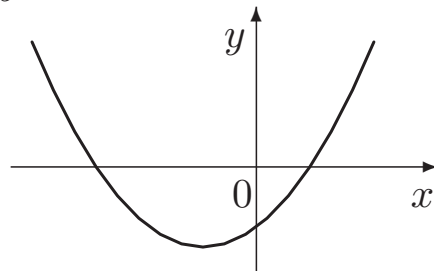
*Ответ:*  $b < 0$ ,  $c > 0$ , о знаке  $a$  ничего утверждать нельзя.

**Задача 1.50.** (ЦТ) Вершина параболы, задаваемой уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $c \leq 0$  и  $D = b^2 - 4ac < 0$  лежит

- 1) строго в I четверти;
- 2) строго во II четверти;
- 3) строго в III четверти;
- 4) строго в IV четверти;
- 5) возможно, на координатной оси.

*Ответ:* 3.

**Задача 1.51.** (ЦТ) Если на рисунке изображен график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  и  $D = b^2 - 4ac$ , то справедливо соотношение



- 1)  $ac > 0$
- 2)  $cD > 0$
- 3)  $ab < 0$
- 4)  $bc > 0$
- 5)  $bD > 0$

*Ответ:* 5.

## 2. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА

**Задача 2.1.** (ЦТ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых графики функций  $y_1 = \frac{|x+2|}{x+2}$  и  $y_2 = |x-a|$  имеют одну общую точку.

*Решение.*

Построим на одном чертеже графики функций  $y_1$  и  $y_2$ . График  $y_1 = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ -1, & x < -2 \end{cases}$  состоит из двух лучей, параллельных оси  $Ox$  и не существует при  $x = -2$ . График функции  $y_2 = |x-a|$  получается из графика  $y = |x|$  сдвигом влево при  $a < 0$  и сдвигом вправо при  $a > 0$ .

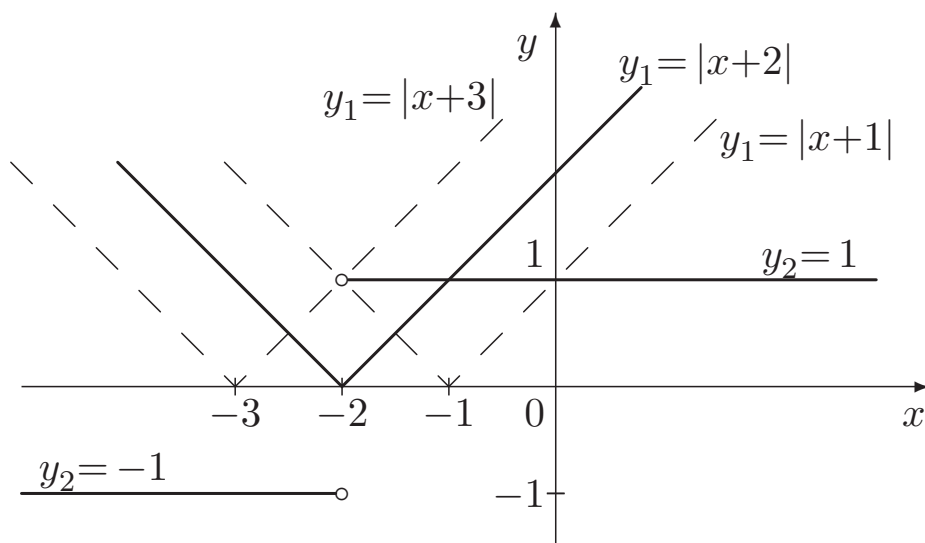


Рис. 7:

Из рис. 7 следует, что графики  $y_1$  и  $y_2$  имеют одну общую точку, если  $a \in (-3; -1]$ . При  $a = -3$  общих точек нет, т.к. график  $y_2 = |x+3|$  проходит через проколотую точку графика  $y_1$ .

*Ответ:*  $a \in (-3; -1]$ .

**Задача 2.2.** (ЦТ) Укажите все значения параметра  $a \neq 0$ , при которых графики функций  $y_1 = |x^2 + 3ax|$  и  $y_2 = -3a$  имеют только две общие точки.

*Решение.*

Прежде всего заметим, что уравнение  $|x^2 + 3ax| = -3a$  может иметь решения только при  $a < 0$  ( $a \neq 0$  по условию). График  $y_1 = |x^2 + 3ax|$  получается из параболы  $y = x^2 + 3ax$  отражением

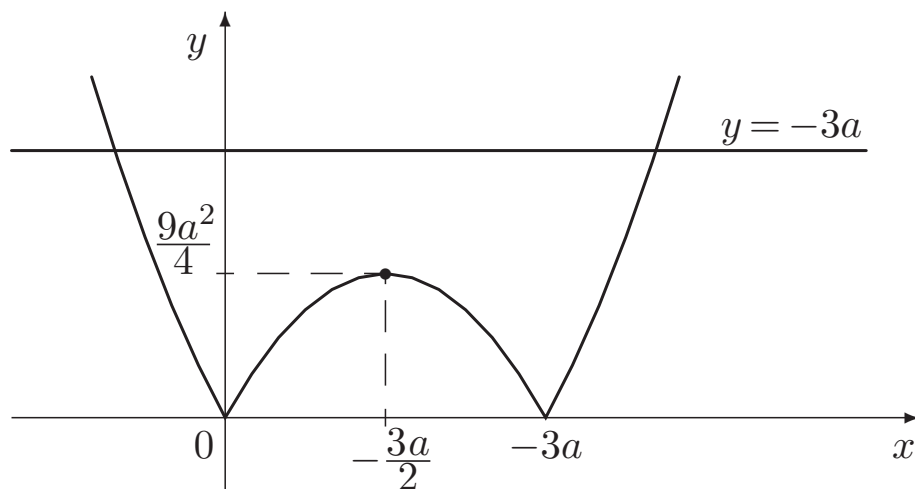


Рис. 8:

отрицательной части симметрично оси  $Ox$ . Корни этой параболы  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -3a > 0$ , вершина находится в точке  $x_v = -\frac{3a}{2} > 0$  и  $y_v = \left| \left(-\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a\frac{3a}{2} \right| = \frac{9a^2}{4}$ . Графиком  $y_2 = -3a$  является прямая, параллельная оси  $Ox$ .

Из рис. 8 следует, что графики  $y_1$  и  $y_2$  имеют две общие точки ( $a \neq 0$ ) при условии, что  $-3a > y_v \Rightarrow -3a > \frac{9a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 + 4a < 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ .

Ответ:  $a \in \left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ .

**Задача 2.3.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  все решения уравнения  $2\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + a - 4 + x = 0$  удовлетворяют неравенству  $0 \leq x \leq 4$ ?

*Решение.*

Данное уравнение равносильно следующему:  $2|x-a| + x + a - 4 = 0$ , решением последнего являются значения  $x = 3a - 4$  при  $x < a$  и  $x = \frac{1}{3}(a + 4)$  при  $x \geq a$ . Поставленная задача сводится к решению двух систем неравенств

$$\begin{cases} 3a - 4 < a \\ 3a - 4 \geq 0 \\ 3a - 4 \leq 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{a+4}{3} \geq a \\ \frac{a+4}{3} \geq 0 \\ \frac{a+4}{3} \leq 4. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все  $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$ , а второй системы — все  $a \in [-4; 2]$ . Взяв пересечение этих множеств, получим

$a \in [\frac{4}{3}; 2)$ . Кроме того, при  $a = 2$  исходное уравнение имеет один корень  $x = 2$ , удовлетворяющий условию.

Ответ:  $a \in [\frac{4}{3}; 2]$ .

**Задача 2.4.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  определите количество решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

Решение.

С геометрической точки зрения количество решений системы — это число точек пересечения при каждом фиксированном значении параметра  $a$  кривых, заданных уравнениями системы. Рассматривая в первом уравнении 4 случая и раскрывая модули, получим, что это уравнение задает квадрат (рис. 9). Второе уравнение — это семейство окружностей радиуса  $\sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) с центром в начале координат. При  $a = 0$  окружность вырождается в точку. Из рис. 9 следует, что когда окружность касается квадрата изнутри, т.е. при  $\sqrt{a} = 2\sqrt{2}$  ( $a = 8$ ) и при  $\sqrt{a} = 4$  ( $a = 16$ ) (окружность проходит через вершины квадрата) система имеет 4 решения. При  $8 < a < 16$  общих точек у окружности и квадрата 8. При  $a < 8$  и  $a > 16$  решений нет.

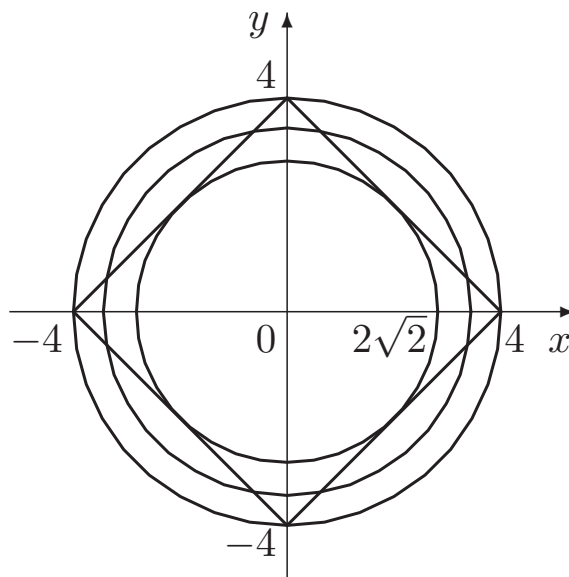


Рис. 9:

Ответ: Если  $a \in (-\infty; 8) \cup (16; +\infty)$  : решений нет,  
 если  $a = 8$ ;  $a = 16$  : четыре решения,  
 если  $a \in (8; 16)$  : 8 решений.

**Задача 2.5.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  найдите решения уравнения  $|2x + 3| + |2x - 3| = ax + 6$ .

Решение.

С геометрической точки зрения решения уравнения — это точки пересечения кривых, задаваемых левой и правой частью уравнения. Раскрывая модули в левой части, получим, что график функции  $y_1 = |2x + 3| + |2x - 3|$  — это ломаная линия (рис. 10). Правая часть  $y_2 = ax + 6$  задает на плоскости семейство прямых, проходящих через точку  $A(0; 6)$  и имеющих переменный угол наклона к оси  $Ox$

$\operatorname{tg} \alpha = a$ . Из рисунка видно, что при  $a = 0$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) ломаная и прямая имеют бесконечное число точек пересечения  $x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ .

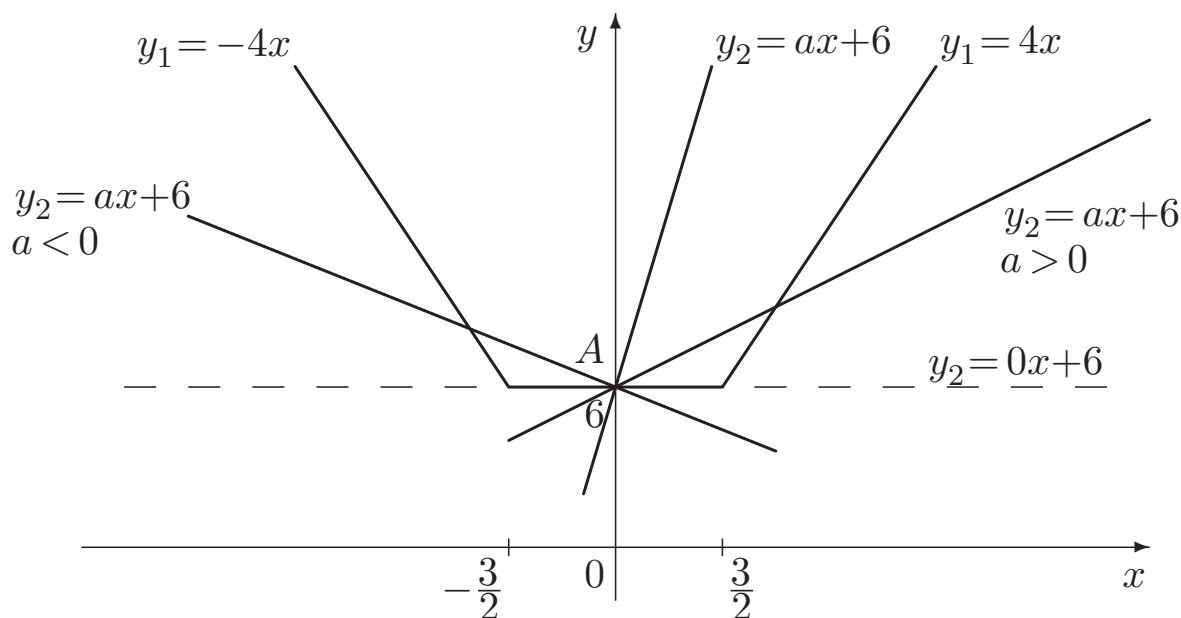


Рис. 10:

Правая часть ломаной имеет уравнение  $y_1 = 4x$  ( $\operatorname{tg} \alpha = 4$ ), поэтому при изменении параметра  $a \in (0; 4)$  ломаная и прямые из семейства имеют две точки пересечения: одна из них  $x = 0$ , а вторая находится из уравнения  $ax + 6 = 4x \Rightarrow x = \frac{6}{4-a}$ .

При  $a = 4$  графики  $y_1 = 4x$  и  $y_2 = ax + 6$  параллельны, точка пересечения с ломаной только одна:  $x = 0$ .

При  $a \in (4; +\infty)$  в семействе прямых увеличивается угол наклона до  $90^\circ$ , поэтому точка пересечения с ломаной только одна:  $x = 0$ .

Рассуждая аналогично, получим, что при  $a \in (-4; 0)$  будет два решения:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{6}{a+4}$ , а при  $a \in (-\infty; -4]$  — одно решение  $x = 0$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; -4]$  :  $x = 0$ ,  
 если  $a \in (-4; 0)$  :  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{6}{a+4}$ ,  
 если  $a = 0$  :  $x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ ,  
 если  $a \in (0; 4)$  :  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{6}{4-a}$ ,  
 если  $a \in [4; +\infty)$  :  $x = 0$ .

**Задача 2.6.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$  справедливо для всех значений  $x$ ?

*Решение.*

При  $x \geq a$  неравенство равносильно следующему:

$$x^2 + 4(x - a) - a^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad (x - a)(x - (-a - 4)) \geq 0.$$

Последнее квадратное неравенство будет справедливо для всех  $x$  из промежутка  $x \geq a$ , если выполняется условие  $a \geq -a - 4$ , т.е.  $a \geq -2$ .

Если  $x < a$ , то по аналогии с предыдущим случаем приходим к неравенству  $(x - a)(x - (4 - a)) \geq 0$ , которое справедливо для всех  $x$  из рассматриваемого промежутка при  $a \leq 4 - a$ , т.е.  $a \leq 2$ .

*Ответ:*  $a \in [-2; 2]$ .

**Задача 2.7.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $2 > |x + a| + x^2$  имеет положительные решения?

*Решение.*

Данное неравенство равносильно следующему:  $2 - x^2 > |x + a|$ . Введем в рассмотрение функции  $y_1 = 2 - x^2$  и  $y_2 = |x + a|$ , графики которых приведены на рис. 11.

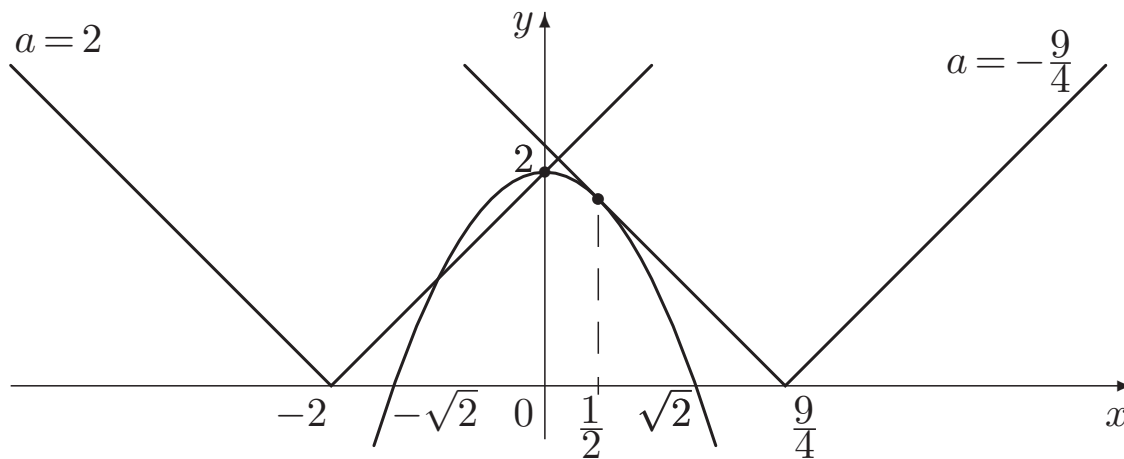


Рис. 11:

Для фиксированного значения  $a$  положительным решением неравенства будет то положительное  $x_0$ , при котором точка графика  $y_1(x_0) = 2 - x_0^2$  лежит выше точки графика  $y_2(x_0) = |x_0 + a|$ .

Заметим, что при  $a = 2$  график функции  $y_2 = |x + 2|$  проходит через точку с координатами  $(0; 2)$ . При движении графика  $y_2$  вправо (и уменьшении  $a$ ) графики двух функций имеют точку пересечения  $x_0 > 0$ , причем парабола выше графика с модулем. Это значит, что неравенство имеет положительные решения.

Найдем теперь значение  $a$ , при котором графики касаются в точке с положительной абсциссой. Очевидно, это будет при условии



$x + a < 0$ , т.е.  $2 - x^2 = -x - a$ . Последнее уравнение имеет единственное положительное решение  $x = \frac{1}{2}$  при  $D = 0$  или  $a = -\frac{9}{4}$ .

Таким образом, при  $a \in [-\frac{9}{4}; 2)$  два графика имеют общую точку на интервале  $x \in (0; \sqrt{2})$ , а исходное неравенство имеет положительные решения.

Ответ:  $a \in [-\frac{9}{4}; 2)$ .

**Задача 2.8.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $a - x > |1 - |x||$ .

Решение.

Перепишем исходное неравенство в виде  $a > x + ||x| - 1|$ . Рассмотрим две функции  $y_1 = a$  (график — прямая, параллельная оси  $Ox$ ) и  $y_2 = x + ||x| - 1|$ . Вторую функцию, раскрывая модули, можно записать так:

$$y_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -1 \\ 2x + 1, & \text{если } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

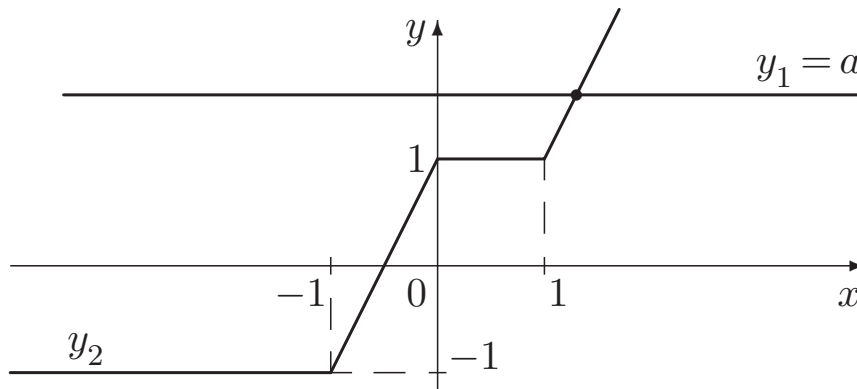


Рис. 12:

Графиком  $y_2(x)$  является ломаная, приведенная на рис. 12. Решениями неравенства будут те значения  $x$ , при которых точки графика  $y_1 = a$  лежат выше точек графика  $y_2(x)$ . Из рис. 12 получаем, что при  $a \leq -1$  таких точек нет, при  $a \in (-1; 1)$  — это точки вида  $a > 2x + 1$ , т.е.  $x < \frac{a-1}{2}$ ; при  $a = 1$  решением является промежуток  $x < 0$ , а при  $a > 1$  решения получаются из неравенства  $a > 2x - 1$ , откуда  $x < \frac{a+1}{2}$ .

*Ответ:* Если  $a \leq -1$ : решений нет,  
 если  $-1 < a \leq 1$ :  $x < \frac{a-1}{2}$ ,  
 если  $a > 1$ :  $x < \frac{a+1}{2}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.9.** (ЦТ) Укажите все значения параметра  $a \neq 0$ , при которых графики функций  $y = |x^2 - 2ax|$  и  $y = 3a$  имеют только две общие точки.

*Ответ:*  $a \in (0; 3)$ .

**Задача 2.10.** (ЦТ) Укажите все значения параметра  $a \neq 0$ , при которых графики функций  $y = |3x^2 + ax|$  и  $y = -\frac{a}{6}$  имеют только две общие точки.

*Ответ:*  $a \in (-2; 0)$ .

**Задача 2.11.** (ЦТ) Укажите все значения параметра  $a$ , при которых графики функций  $y = \frac{|x+7|}{x+7}$  и  $y = (x+a)^2$  имеют одну общую точку.

*Ответ:*  $a \in [6; 8)$ .

**Задача 2.12.** (ЦТ) Укажите все значения параметра  $a$ , при которых графики функций  $y = \frac{x-5}{|x-5|}$  и  $y = |x+a|$  имеют одну общую точку.

*Ответ:*  $a \in [-6; -4)$ .

**Задача 2.13.** (СГАУ) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых все решения уравнения  $3\sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2} - 3a + x - 15$  принадлежат отрезку  $[4; 9]$ .

*Ответ:*  $a \in [-3; -\frac{23}{9}]$ .

**Задача 2.14.** При каких значениях параметра  $a$  система  

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$
 имеет бесконечное число решений?

*Ответ:*  $a = \sqrt{15}$ .

**Задача 2.15.** (ЦТ) Найдите наименьшее целое неотрицательное значение параметра  $a$ , при котором система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6|x| + 8 \leq 0 \\ a^2 - x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

*Ответ:*  $a = 2$ .

**Задача 2.16.** (ЦТ) Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором система неравенств

$$\begin{cases} |x - 4|(x - 6) \geq 0 \\ x^2 - a^2 < 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

Ответ:  $a = 4$ .

**Задача 2.17.** (ЦТ) Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором система неравенств

$$\begin{cases} |x + 4|(x + 2) \geq 0 \\ \sqrt{a - x} > 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

Ответ:  $a = -4$ .

В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнения:

**Задача 2.18.**  $|x^2 + 2ax| = 1$ .

Ответ: Если  $|a| \geq 1$ : четыре корня  $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ ,  
 $x_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ ;  
 если  $|a| < 1$ : два корня  $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ .

**Задача 2.19.**  $|x - a| + |x - 2a| = 3a$ .

Ответ: Если  $a < 0$ : решений нет;  
 если  $a = 0$ :  $x = 0$ ;  
 если  $a > 0$ :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3a$ .

**Задача 2.20.**  $|x| + |x - 2| + a = 0$ .

Ответ: Если  $a < -2$ :  $x_{1,2} = 1 \pm \frac{a}{2}$ ;  
 если  $a = -2$ :  $x \in [0; 2]$ ;  
 если  $a > -2$ : решений нет.

**Задача 2.21.** (СГАУ)  $|5x + 2| + |5x - 2| = ax + 2$ .

Ответ: Если  $a \in (-\infty; -10]$ :  $x = \frac{2}{a}$ ;  
 если  $a \in (-10; -5]$ :  $x_1 = \frac{2}{a}$ ,  $x_2 = -\frac{2}{a + 10}$ ;  
 если  $a \in (-5; 5)$ : решений нет;  
 если  $a \in [5; 10)$ :  $x_1 = \frac{2}{a}$ ,  $x_2 = \frac{2}{10 - a}$ ;  
 если  $a \in [10; +\infty)$ :  $x = \frac{2}{a}$ .

**Задача 2.22.** (СГАУ) Установите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|3x + 4| + |3x - 4| = ax + 8$  имеет конечное число решений и найдите их.

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; -6]$  :  $x = 0$ ;  
 если  $a \in (-6; 0)$  :  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{6+a}$ ;  
 если  $a \in (0; 6)$  :  $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{6-a}$ ;  
 если  $a \in [6; +\infty)$  :  $x = 0$ .

В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенства:

**Задача 2.23.**  $|x - 3a| - |x + a| < 2a$ .

*Ответ:* Если  $a < 0$  :  $x < 2a$ ;  
 если  $a = 0$  : решений нет;  
 если  $a > 0$  :  $x > 0$ .

**Задача 2.24.**  $|x + 2| - |2x + 8| \geq a$ .

*Ответ:* Если  $a < -4$  :  $a - 6 \leq x \leq -a - 6$ ;  
 если  $-4 \leq a < 2$  :  $a - 6 \leq x \leq -\frac{a+10}{3}$ ;  
 если  $a = 2$  : единственное решение  $x = -4$ ;  
 если  $a > 2$  : решений нет.

**Задача 2.25.**  $|x^2 - 5x + 6| < ax$ .

Указание. Рассмотреть графики параболы  $|x^2 - 5x + 6|$  и семейства прямых  $y = ax$ . При  $-5 - 2\sqrt{6} \leq a \leq 0$  решений нет.

**Задача 2.26.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $|ax^2 - ax + 1| \leq 1$  выполняется для всех значений  $x$  из промежутка  $[0; 1]$ ?

*Ответ:*  $0 \leq a \leq 8$ .

**Задача 2.27.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $3 - |x - a| > x^2$  имеет по крайней мере одно отрицательное решение?

*Ответ:*  $-\frac{13}{4} < a < 3$ .

**Задача 2.28.** В зависимости от значений параметра  $a$  выясните число решений уравнения  $|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$ .

*Ответ:* Если  $a < 2$  : решений нет;  
 если  $a = 2$  :  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;  
 если  $a \in (2; \frac{5}{2})$  : 4 решения;  
 если  $a = \frac{5}{2}$  : 3 решения;  
 если  $a > \frac{5}{2}$  : 2 решения.

### 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

**Задача 3.1.** В зависимости от значений параметра  $a$  определите число корней уравнения  $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$ .

*Решение.*

Уравнение является рациональным уравнением 4 степени, следовательно, может иметь не более 4 корней. Полагая  $y = x^2$ , перепишем уравнение в виде  $y^2 + (1 - 2a)y + (a^2 - 1) = 0$ .

Исходное уравнение имеет 4 корня, если последнее квадратное уравнение имеет 2 различных положительных корня. Достаточные условия этого записаны в виде системы (т.к. ветви параболы направлены вверх):

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) > 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (1; \frac{5}{4}).$$

Если один из корней  $y_1 = 0$ , а второй корень  $y_2 > 0$ , то исходное уравнение будет иметь 3 корня. Запишем условия этого случая:

$$\begin{cases} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) > 0 \\ f(0) = a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Далее, исходное уравнение по переменной  $x$  будет иметь 2 корня  $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_2}$ , если один из корней  $y_1 < 0$ , а второй  $y_2 > 0$ . Условием этого случая является неравенство  $f(0) < 0$  или  $a \in (-1; 1)$ . Кроме того, если  $D = 0$  ( $a = \frac{5}{4}$ ), то исходное уравнение также имеет 2 корня  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $y_1 = 0$ ,  $y_2 < 0$ . Тогда исходное уравнение по переменной  $x$  будет иметь единственный корень  $x = 0$ . Достаточным условием этого является система

$$\begin{cases} f(0) = a^2 - 1 = 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Наконец, исходное уравнение не будет иметь решений в двух случаях: или когда оба корня отрицательны  $y_1 < 0$ ,  $y_2 < 0$ ; или когда корней у квадратного уравнения вообще нет, т.е.  $D < 0$ . Достаточные условия отсутствия корней определяет совокупность

$$\left[ \begin{array}{l} D = 5 - 4a < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} D = 5 - 4a > 0 \\ y_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2a - 1) < 0 \\ f(0) = a^2 - 1 > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

*Ответ:* Если  $1 < a < \frac{5}{4}$  : 4 корня;  
 если  $a = 1$  : 3 корня;  
 если  $-1 < a < 1, a = \frac{5}{4}$  : 2 корня;  
 если  $a = -1$  : 1 корень;  
 если  $a < -1, a > \frac{5}{4}$  : нет корней.

**Задача 3.2.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x - a)^2(a(x - a)^2 - a - 1) + 1 = 0$  имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

*Решение.*

Сделаем в исходном уравнении подстановку  $y = (x - a)^2$ , тогда оно примет вид:  $ay^2 - (a + 1)y + 1 = 0$ .

При  $a = 0$  получаем, что  $y = 1$ , откуда  $x = \pm 1$ . В этом случае требование задачи не выполняется.

Пусть теперь  $a \neq 0$ . В этом случае корнями последнего уравнения являются  $y_1 = 1; y_2 = \frac{1}{a}$ .

При  $a < 0$   $y_2 < 0$  и исходное уравнение имеет корни  $x_1 = a + 1; x_2 = a - 1 < 0$ . Требования задачи не выполняются.

При  $a > 0$  корни исходного уравнения таковы:  $x_1 = a + \frac{1}{\sqrt{a}}; x_2 = a + 1; x_3 = a - 1; x_4 = a - \frac{1}{\sqrt{a}}$ .

При  $0 < a < 1$  два из этих корней положительны, а два отрицательны, т.е. требование задачи не выполняется.

При  $a = 1$   $x_1 = x_2 = 2; x_3 = x_4 = 0$ , т.е. число положительных корней больше, чем отрицательных.

Наконец, при  $a > 1$  все четыре корня положительны.

*Ответ:*  $a \geq 1$ .

**Задача 3.3.** В зависимости от значений параметра  $a$  найдите наименьший корень уравнения  $x^3 + 2ax^2 - (a + 1)^2x - 2a(a + 1)^2 = 0$ .

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде  $(x + 2a)(x - a - 1)(x + a + 1) = 0$ . Корнями этого уравнения являются  $x_1 = -a - 1; x_2 = a + 1; x_3 = -2a$ .

Найдем те значения параметра  $a$ , при которых наименьшим корнем будет  $x_1$ .

Запишем систему

$$\begin{cases} -a - 1 < a + 1 \\ -a - 1 < -2a \end{cases} \Rightarrow -1 < a < 1.$$

Если предположить, что наименьшим является корень  $x_2$ , то придем к системе

$$\begin{cases} a + 1 < -a - 1 \\ a + 1 < -2a \end{cases} \Rightarrow a < -1.$$

В последнем случае, когда  $x_3$  является наименьшим корнем уравнения, необходимо решить систему

$$\begin{cases} -2a < a + 1 \\ -2a < -a - 1 \end{cases} \Rightarrow a > 1.$$

При  $a = -1$  корни  $x_2$  и  $x_1$  совпадают, а при  $a = 1$  корни  $x_1 = x_3$ .

*Ответ:* Если  $a \leq -1$ :  $x = a + 1$ ;  
если  $-1 < a < 1$ :  $x = -a - 1$ ;  
если  $a \geq 1$ :  $x = -2a$ .

**Задача 3.4.** (СГАУ) Для каждого значения параметра  $a$  решите неравенство  $\frac{x^2 - 2x + 3^{|a|}}{x^2 - 4} < 0$ .

*Решение.*

Дискриминант числителя  $D = 4(1 - 3^{|a|}) \leq 0$  неотрицателен для любых значений параметра  $a$ .

Если  $a = 0$ , то  $D = 0$  и неравенство перепишется в виде  $\frac{(x - 1)^2}{(x - 2)(x + 2)} < 0$ . Решая последнее неравенство методом интервалов, получим  $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$ . Если  $a \neq 0$ , то  $|a| > 0$ ,  $3^{|a|} > 1$  и дискриминант  $D < 0$ . Ветви параболы в числителе направлены вверх, следовательно  $x^2 - 2x + 3^{|a|} > 0$  для любых значений  $x$ . В этом случае решением исходного неравенства является интервал  $x \in (-2; 2)$ .

*Ответ:* Если  $a \neq 0$ :  $x \in (-2; 2)$ ;  
если  $a = 0$ :  $x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$ .

**Задача 3.5.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{x + 3a - 5}{ax - 1} > 0$  справедливо для всех  $x$  таких, что  $x \in [1; 4]$ ?

*Решение.*

Исходное неравенство равносильно неравенству  $(x + 3a - 5)(ax - 1) > 0$  или  $ax^2 + x(3a^2 - 5a - 1) - 3a + 5 > 0$ .

Если  $a = 0$ , то решением этого неравенства являются все  $x < 5$ , т.е. требования задачи выполняются.

При  $a \neq 0$  неравенство имеет 2 корня  $x_1 = 5 - 3a$  и  $x_2 = \frac{1}{a}$ . Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх, поэтому условия задачи будут выполнены, если оба корня квадратного трехчлена будут либо меньше 1, либо больше 4. Запишем эти уравнения в виде совокупности систем:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5 - 3a < 1 \\ \frac{1}{a} < 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 5 - 3a > 4 \\ \frac{1}{a} > 4. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решая эти системы при условии  $a > 0$ , получим, что  $a \in (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{4}{3}; \infty)$ .

При  $a < 0$  ветви параболы направлены вниз, из геометрической интерпретации требований задачи получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(4) > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 7a - 4 > 0 \\ 12a^2 - 7a + 1 > 0 \\ a < 0 \end{array} \right.$$

Решением этой системы являются все  $a < 0$ . Объединяя полученные решения, получим ответ.

*Ответ:*  $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$ .

**Задача 3.6.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $x + \frac{7a^2 - a - 2}{x - a} < -7a$  не имеет решений, больших 1?

*Решение.*

Приведем неравенство к виду  $\frac{x^2 + 6ax - a - 2}{x - a} < 0$ . Так как дискриминант числителя  $\frac{D}{4} = 9a^2 + a + 2 > 0$  для любого  $a$ , запишем равносильное неравенство  $\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x - a} < 0$ , где  $x_1 = -3a - \sqrt{9a^2 + a + 2}$ ;  $x_2 = -3a + \sqrt{9a^2 + a + 2}$ . Решая последнее неравенство методом интервалов, приходим к выводу, что требование задачи будет выполняться только при таком расположении точек  $x_1, x_2, a$  на оси абсцисс, при котором совместна система неравенств  $\begin{cases} x_2 \leq 1, \\ a \leq 1. \end{cases}$

Решая эту систему, получим ответ.

*Ответ:*  $a \in [\frac{1}{5}; 1]$ .



**Задача 3.7.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение? Найдите это решение.

*Решение.*

Поскольку  $x = -1$  не является решением системы (проверка подстановкой), полагаем  $x \neq -1$ . Тогда из второго уравнения системы получаем  $y = \frac{-x-2}{x+1}$ . Подставляя выражение для  $y$  в первое уравнение системы, получим квадратное уравнение на переменную  $x$ :  $x^2(a+1) + x(a+2) + 2-a = 0$ .

Последнее уравнение будет иметь единственное решение в том случае, когда оно является линейным, т.е.  $a+1=0$ . При  $a=-1$  решением системы являются:  $x = -3$ ;  $y = -\frac{1}{2}$ . Квадратное уравнение также будет иметь единственное решение, когда его дискриминант равен нулю, т.е.  $D = (a+2)^2 - 4(a+1)(2-a) = 0$ . Это будет при  $a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ . При этих значениях параметра  $a$  находим

решения системы:  $x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \pm \sqrt{5}}$ ;  $y = -3 \pm \sqrt{5}$ .

Наконец, исходная система будет иметь ровно одно решение, когда квадратное уравнение на переменную  $x$  хотя и имеет два решения, но одно из них является “запрещенным” для системы, т.е.  $x = -1$ . Подставляя  $x = -1$  в квадратное уравнение, найдем, что такой корень будет при  $a = 1$ . Второй корень при этом значении  $a$  будет равен  $x = -\frac{1}{2}$  и соответственно  $y = -3$ .

*Ответ:* Если  $a = -1$  :  $x = -3$ ;  $y = -\frac{1}{2}$ ;  
если  $a = 1$  :  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $y = -3$ ;  
если  $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$  :  $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ;  $y = -3 - \sqrt{5}$ ;  
если  $a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$  :  $x = -\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ ;  $y = -3 + \sqrt{5}$ .

**Задача 3.8.** При каких значениях параметра  $a$  решение системы

$$\begin{cases} x + y = 2(a+1) \\ xy = a^2 + 3a - 1 \end{cases} \quad \text{удовлетворяет условиям} \quad |x| < 1; |y| > 1?$$

*Решение.*

Рассмотрим уравнение  $t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 3a - 1 = 0$ . Тогда по теореме Виета пары корней этого уравнения  $t_1$ ;  $t_2$  будут являться

решениями системы. При таком подходе задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра  $a$  один из корней квадратного трехчлена  $f(t) = t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 3a - 1$  принадлежит интервалу  $(-1; 1)$ , а второй корень расположен на числовой оси вне этого интервала?

Из геометрической интерпретации решение последней задачи сводится к решению неравенства

$$f(-1) \cdot f(1) < 0 \quad \text{или} \quad (a^2 + 5a + 2)(a^2 + a - 2) < 0.$$

Решая последнее методом интервалов получим ответ.

$$\text{Ответ: } a \in \left( \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}; -2 \right) \cup \left( \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; 1 \right)$$

**Задача 3.9.** При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

*Решение.* Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y+1 \\ (x-1)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда приходим к системе

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0 \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Из геометрического смысла квадратного трехчлена следует, что система будет иметь хотя бы одно решение, если совместна совокупность систем неравенств:

$$\left[ \begin{cases} D = 1 - 4a \geq 0 \\ y_{\text{в}} = a - \frac{1}{2} > -1 \\ D = 1 - 4a \geq 0 \\ y_{\text{в}} = a - \frac{1}{2} \leq -1 \\ f(-1) = a^2 + 2a \leq 0. \end{cases} \right.$$

Решая системы неравенств, приходим к совокупности откуда получаем ответ.

$$\left[ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq a \leq -\frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } -2 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

**Задача 3.10.** Найдите значения параметра  $a$  при которых уравнения  $ax^3 - x^2 - x - a - 1 = 0$  и  $ax^2 - x(a+1) = 0$  имеют общий корень. Найдите этот корень.

*Решение.*

Вначале убедимся, что  $a \neq 0$ . Действительно, при  $a = 0$  уравнения примут вид  $x^2 - x - 1 = 0$  и  $x + 1 = 0$ . Очевидно, что

общих корней в этом случае нет.

При  $a \neq 0$  обозначим  $x_0$  — общий корень уравнений, тогда числа  $x_0$  и  $a$  будут решениями системы

$$\begin{cases} ax_0^3 - x_0^2 - x_0 - (a + 1) = 0 \\ ax_0^2 - x_0(a + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы является  $x_0 = \frac{a+1}{a}$  при любом  $a \neq 0$ .

Ответ: При  $a \neq 0$ :  $x_0 = \frac{a+1}{a}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.11.** В зависимости от значений параметра  $a$  определите количество корней уравнения  $x^2 + x + \frac{9}{x^2 + x + 1} = a$ .

Ответ: Если  $a < 5$  : корней нет,  
если  $a = 5$  : 2 корня,  
если  $5 < a < \frac{47}{4}$  : 4 корня,  
если  $a = \frac{47}{4}$  : 3 корня,  
если  $a > \frac{47}{4}$ , : 2 корня.

При каких значениях параметра  $a$  уравнения имеют общий корень? Найдите этот корень.

**Задача 3.12.**  $x^3 + ax + 1 = 0$  и  $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ .

Ответ:  $a = -2$ ;  $x = 1$ .

**Задача 3.13.**  $(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0$  и  $ax^2 - x + 1 = 0$

Ответ:  $a = 0$ ;  $x = \frac{2}{9}$ .

**Задача 3.14.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\frac{a-1}{x+4} = \frac{2x+3}{x^2-x-20} \quad \text{имеет корень } x \leq 2?$$

Ответ:  $a \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{14}{9}\right) \cup \left(\frac{14}{9}; 3\right)$ .

**Задача 3.15.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^5 + (a-4)x^3 + (a+3)x = 0 \quad \text{имеет 5 действительных корней?}$$

Определите все  $a$ , при которых эти корни образуют арифметическую прогрессию. Запишите эту прогрессию для целого значения  $a$ .

Ответ:  $a \in \left[-10; -\frac{2}{3}\right]$ ;  $a = -\frac{23}{3}$ ,  $a = -1$ ;  
 $\div -2; -1; 0; 1; 2$  или  $2; 1; 0; -1; -2$

**Задача 3.16.** При каком значении параметра  $a$  уравнение  $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$  имеет 3 различных корня, образующих геометрическую прогрессию? Найдите эти корни.

Ответ:  $a = -8$  :  $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = -1$ .

Найдите решения неравенств в зависимости от параметра  $a$ .

**Задача 3.17.**  $\frac{x^2 + 4x}{3^{|a|} \cdot x^2 - 2x + 1} > 0$ .

Ответ:  $a \neq 0$  :  $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ ,  
 $a = 0$  :  $x \in (-\infty; -4) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .

**Задача 3.18.**  $\frac{2ax + 3}{5x - 4a} < 4$ .

Ответ: Если  $a = 10$  :  $x < 8$ ,  
 если  $a < 10$  :  $x < \frac{4a}{5}; x > \frac{16a + 3}{20a - 2a}$ ,  
 если  $a > 10$  :  $\frac{16a + 3}{20a - 2a} < x < \frac{4a}{5}$ .

**Задача 3.19.**  $\frac{3ax + 4}{3a + 9} < \frac{x}{a + 3} + \frac{3a - 5}{3a - 9}$ .

Ответ: Если  $a = 1; a = -3; a = 3$  : решений нет,  
 если  $-3 < a < 1$  :  $x > \frac{a + 1}{a - 3}$ ,  
 если  $a < -3; 1 < a < 3; a > 3$  :  $x < \frac{a + 1}{a - 3}$ .

**Задача 3.20.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$  выполняется при всех  $x$  таких, что  $|x| \leq 1$ ?

Ответ:  $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

При каких значениях параметра  $a$  системы имеют решения?

**Задача 3.21.**  $\begin{cases} 3x + (a - 1)y = a + 1 \\ (a + 1)x + y = 3. \end{cases}$

Ответ:  $a \neq -2$ .

**Задача 3.22.**  $\begin{cases} y(ax - 1) = 2|x + 1| + 2xy \\ xy + 1 = x - y. \end{cases}$

Ответ:  $a < -5 - 4\sqrt{2}; a > 0$ .

**Задача 3.23.**  $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + (a^6 + 1)x + (a - 1)y + a = 0. \end{cases}$

Ответ:  $a \geq \frac{3}{4}$ .

**Задача 3.24.** 
$$\begin{cases} x = a + \sqrt{y} \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $a \leq -3$ ;  $a \geq \frac{3}{4}$ .

При каких значениях параметра  $a$  системы имеют ровно одно решение?

**Задача 3.25.** 
$$\begin{cases} \sqrt{x} - y = a \\ y\sqrt{x} = 1 - a. \end{cases}$$

Ответ:  $a < 1$ ;  $a = 2$ .

**Задача 3.26.** 
$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0 \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $a = \frac{11}{12}$ ;  $a = 1$ ;  $a = 3$ .

**Задача 3.27.** 
$$\begin{cases} y \geq x^2 + a \\ x \geq y^2 + a. \end{cases}$$

Ответ:  $a = \frac{1}{4}$ .

**Задача 3.28.** 
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 - a \leq 0 \\ x^2 - 2x + 6a - 3 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ:  $a = -1$ ;  $a = 0$ .

**Задача 3.29.** (СГАУ) 
$$\begin{cases} y - x - yx + 3 = 0 \\ a(x + y) = xy - 3. \end{cases}$$
 Найдите это решение.

Ответ: Если  $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  :  $x = 3 - \sqrt{6}$ ;  $y = -3 - \sqrt{6}$ ,

если  $a = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  :  $x = 3 + \sqrt{6}$ ;  $y = -3 + \sqrt{6}$ ,

если  $a = -1$  :  $x = 3$ ;  $y = 0$ ,

если  $a = 1$  :  $x = 0$ ;  $y = -3$ .

В зависимости от параметра  $a$  решите системы неравенств.

**Задача 3.30.** 
$$\begin{cases} ax > -1 \\ x + a > 0. \end{cases}$$

*Ответ:* Если  $a \leq -1$  : решений нет,  
 если  $-1 < a < 0$  :  $-a < x < -\frac{1}{a}$ ,  
 если  $a = 0$  :  $x > 0$ ,  
 если  $0 < a \leq 1$  :  $x > -a$ ,  
 если  $a > 1$  :  $x > -\frac{1}{a}$ .

**Задача 3.31.** 
$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 - (a+3)x < 0. \end{cases}$$

*Ответ:* Если  $a < -3$  :  $a+3 < x < 0$ ,  
 если  $a = -3$  : решений нет,  
 если  $-3 < a < -2$  :  $0 < x < a+3$ ,  
 если  $-2 \leq a \leq 0$  :  $0 < x < 1$ ,  
 если  $0 < a < 1$  :  $a < x < 1$ ,  
 если  $a = 1$  : решений нет,  
 если  $a > 1$  :  $1 < x < a$ .

**Задача 3.32.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений 
$$\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1 \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5 \end{cases}$$
 не имеет решений.

*Ответ:*  $a = -6$ .

**Задача 3.33.** При каких значениях параметра  $a$ , функция

$$y = \frac{1}{ax^2 + 4ax + 7}$$

определена для всех действительных значений  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in [0; \frac{7}{4})$ .

**Задача 3.34.** При каких значениях параметра  $a$  для любого  $b$  найдется хотя бы одно  $c$  такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx + y = ac^2 \\ x + by = ac + 1 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение?}$$

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ .

**Задача 3.35.** Множество  $M$  состоит из точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leq y \\ 3x + y - (2a+4) \leq 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях параметра  $a$  множество  $M$  содержит отрезок  $[-2; -1]$  оси  $Ox$ .

*Ответ:*  $a \in [-\frac{7}{2}; 1]$ .

## 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

**Задача 4.1.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sqrt{a-x} = 2-x$ .

*Решение.*

Рассмотрим 4 способа решения этой задачи, которые могут быть использованы при решении иных типов уравнений.

Способ 1. Запишем систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} a-x = (2-x)^2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - a + 4 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Дискриминант первого уравнения системы  $D = 4a - 7$ , откуда следует, что при  $a < \frac{7}{4}$  решений нет, а при  $a = \frac{7}{4}$  исходное уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{3}{2}$ .

Если  $a > \frac{7}{4}$ , то первое уравнение системы имеет два корня  $x_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$  и  $x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}}$ .

Очевидно,  $x_1 < x_2$ , следовательно, для выполнения второго неравенства системы  $x \leq 2$  для обоих корней достаточно совместности системы

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}} \leq 2. \end{cases}$$

Решением последней системы является интервал  $\frac{7}{4} < a \leq 2$ , при котором исходное уравнение имеет 2 корня  $x_1$  и  $x_2$ .

Наконец, исходное уравнение будет иметь только одно решение, если окажется, что  $x_1 \leq 2$ , а  $x_2 > 2$ , т.е. совместна система

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}} \leq 2 \\ \frac{3}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}} > 2, \end{cases} \quad \text{откуда } a > 2.$$

*Ответ:* Если  $a < \frac{7}{4}$  : нет решений,

если  $a = \frac{7}{4}$  : одно решение  $x = \frac{3}{2}$ ,

если  $\frac{7}{4} < a \leq 2$  : два решения  $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{a - \frac{7}{4}}$ ,

если  $a > 2$  : одно решение  $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$ .

Способ 2. Рассмотрим систему, равносильную исходному уравнению

$$\begin{cases} x^2 - 3x - a + 4 = 0 \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Исходя из геометрической интерпретации квадратного трехчлена, получим, что система будет иметь 2 решения, если оба корня квадратного трехчлена  $f(x) = x^2 - 3x - a + 4$  будут меньше, либо равны 2. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке  $x = \frac{3}{2} < 2$ , поэтому достаточно выполнения условий:

$$\begin{cases} D = 4a - 7 > 0 \\ f(2) = 2 - a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (\frac{7}{4}; 2].$$

При  $D = 0$  уравнение имеет одно решение  $x = \frac{3}{2}$ . Если же  $f(2) < 0$ , то требованиям  $x \leq 2$  будет удовлетворять лишь один корень (рис. 13). Таким образом, при  $a < 2$  останется только меньший корень  $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$ .

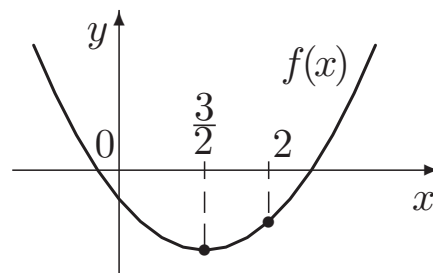


Рис. 13:

Способ 3. Рассмотрим графики функций  $y_1 = \sqrt{a-x}$  и  $y_2 = 2-x$ , задаваемые соответственно левой и правой частями уравнения. График  $y_1$  представляет собой верхнюю часть параболы с ветвями, направленными влево, и вершиной в точке  $x = a$  ( $x \leq a$ ). Абсциссы точек пересечения этих графиков будут являться решениями уравнения. Из рис. 14 следует, что при  $a < \frac{7}{4}$  ( $D < 0$ ) графики не пересекаются.

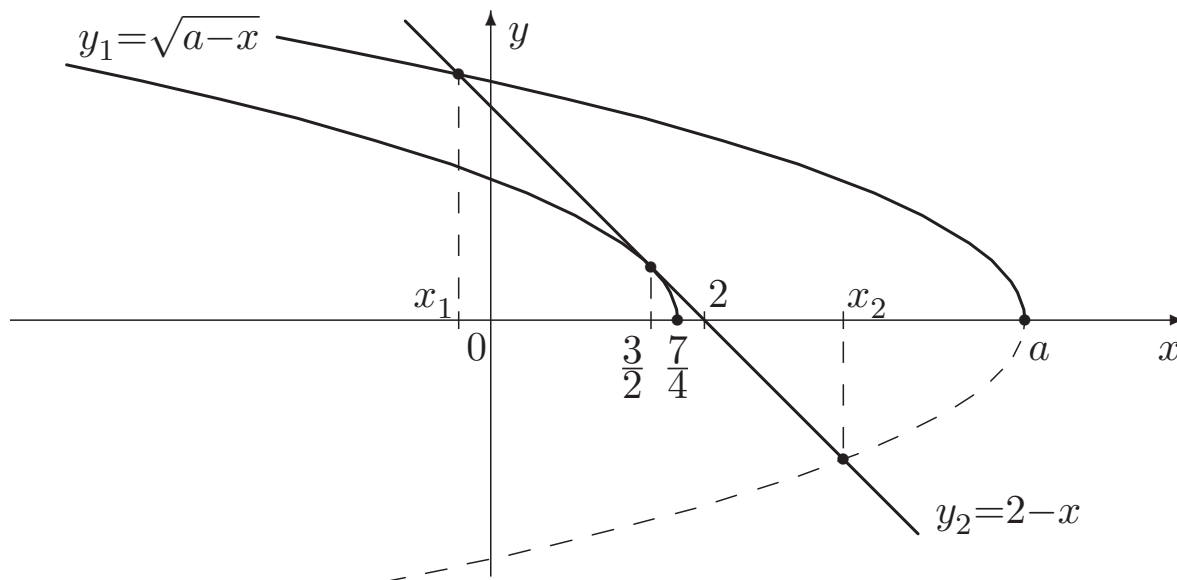


Рис. 14:



При  $a > 2$  прямая  $y_2$  пересекает полупараболу только в одной точке, соответствующей меньшему корню  $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$ .

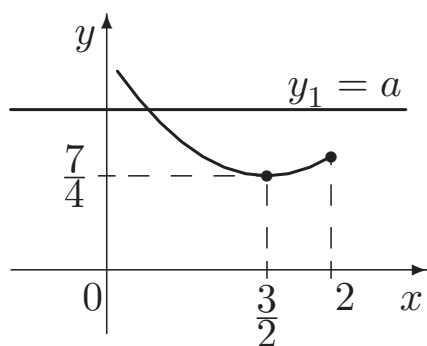


Рис. 15:

Способ 4. Перепишем исходное уравнение в виде:  $\begin{cases} a = x^2 - 3x + 4 \\ x \leq 2. \end{cases}$

Построим на одном чертеже графики функций  $y_1 = a$  (прямая, параллельная оси  $Ox$ ) и  $y_2 = x^2 - 3x + 4$  (парабола) при условии  $x \leq 2$ . Передвигая на рис. 15 прямую  $y_1 = a$ , приходим к выводам, полученным другими способами.

**Задача 4.2.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$ .

*Решение.*

Из вида уравнения следует, что  $a \geq 0$ ,  $x \geq 0$ . Если при этих условиях обозначить  $y = \sqrt{a + x}$ ,  $y \geq 0$ , то уравнение будет равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{a + x} = y, & y \geq 0 \\ \sqrt{a - y} = x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Возводя обе части уравнений системы в квадрат, получим равносильную систему

$$\begin{cases} a + x = y^2, & y \geq 0 \\ a - y = x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

из которой следует уравнение  $(x + y) = (y - x)(x + y)$ .

Если  $x + y = 0$ , то с учетом неравенств  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  получим  $x = y = 0$ , а следовательно,  $a = 0$ .

Если  $x + y \neq 0$ , то из последнего уравнения  $y - x = 1$ , а значит  $\sqrt{a + x} = x + 1$ . Возводя обе части в квадрат, получим уравнение  $x^2 + x + 1 - a = 0$ , которое при  $a \geq \frac{3}{4}$  имеет корни  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$  и  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$ . Очевидно, что первый корень не удовлетворяет условию  $x \geq 0$ , а второй корень  $x_2$  будет неотрицателен при  $a \geq 1$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$  : решений нет,  
если  $a = 0$  :  $x = 0$ ,  
если  $a \in [1; +\infty)$  :  $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$ .

**Задача 4.3.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = 7x$ .

*Решение.*

Из вида уравнения следует, что  $x \geq 0$ . Если  $a = 0$ , то  $x = 0$ . Справедливо и обратное. Предположим, что  $x > 0$ . Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение  $2\sqrt{a^2 - x^2} = x^2 - 2a$ , которое может быть справедливым только при условиях  $0 < x \leq a$ ,  $x^2 \geq 2a$ . Повторное возведение в квадрат и сокращение с учетом  $x > 0$  приводит к значению  $x = 2\sqrt{a - 1}$ ,  $a > 1$ . Очевидно, что условие  $0 < x \leq a$  выполняется при всех  $a > 1$ , а вот условие  $x^2 \geq 2a$  возможно только при  $a \geq 2$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$  : решений нет,  
если  $a = 0$  :  $x = 0$ ,  
если  $a \in [2; +\infty)$  :  $x = 2\sqrt{a - 1}$ .

**Задача 4.4.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} - \sqrt{y+b} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1. \end{cases}$$

*Решение.*

Если возвести обе части обоих уравнений системы в квадрат, то получим систему

$$\begin{cases} x + a + y + b - 1 = 2\sqrt{(a+x)(y+b)} \\ y + a + x + b - 1 = 2\sqrt{(y+a)(x+b)}, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$(x+a)(y+b) = (x+b)(y+a) \quad \text{или} \quad (a-b)(x-y) = 0.$$

Рассмотрим случай  $a = b$ . В этом случае исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+a} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+a} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система несовместна.

Пусть теперь  $x = y$ . В этом случае вместо системы имеем одно уравнение  $\sqrt{x+a} = \sqrt{x+b} + 1$ . Обе части этого уравнения неотрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим равносильное уравнение  $\sqrt{x+b} = \frac{a-b-1}{2}$ . Последнее уравнение может выполняться только при  $a-b \geq 1$ , и в этом случае  $x = \frac{(a-b)^2 - 2(a+b) + 1}{4}$ .

*Ответ:* Если  $a - b < 1$  : решений нет,  
если  $a - b \geq 1$  :  $x = y = \frac{(a-b)^2 - 2(a+b) + 1}{4}$ .

**Задача 4.5.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $a \cdot \sqrt[4]{1+x} + \frac{a}{x} \cdot \sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{x}$ .

*Решение.*

Областью допустимых значений переменной являются все  $x > 0$ . Если умножить обе части уравнения на  $x$ , то придем к уравнению  $a(1+x)^{5/4} = x^{5/4}$ , из вида которого с учетом ОДЗ следует, что  $a > 0$ . А тогда уравнение равносильно следующему:  $(1+\frac{1}{x})^{5/4} = \frac{1}{a}$ , откуда  $x = \frac{a^{4/5}}{1-a^{4/5}}$ . Учитывая теперь, что  $x > 0$  и  $a > 0$ , приходим к рассмотрению неравенства  $1 - a^{4/5} > 0$ , решением которого являются все  $0 < a < 1$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$  : решений нет,  
если  $a \in (0; 1)$  :  $x = \frac{a^{4/5}}{1-a^{4/5}}$ .

**Задача 4.6.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = a$ .

*Решение.*

Сделав замену  $y = \sqrt[3]{1+x}$ , перепишем уравнение в виде  $y + \sqrt[3]{2-y^3} = a$ .

Перенесем переменную  $y$  в правую часть и возведем в куб. Получим равносильное уравнение  $3ay^2 - 3a^2y + a^3 - 2 = 0$ . Это квадратное уравнение при  $0 < a \leq 2$  имеет корни  $y_{1,2} = \frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8-a^3)}}{6a}$ . Выполняя обратную замену, получим ответ.

*Ответ:* Если  $a \leq 0$ ,  $a > 2$  : решений нет,  
если  $0 < a \leq 2$  :  $x_{1,2} = \left[ \frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8-a^3)}}{6a} \right]^3 - 1$ .

**Задача 4.7.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $x + \sqrt{6x} \geq a - 3 + \sqrt{a + 5x - 3}$ .

*Решение.*

Область допустимых значений переменной определяется системой

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{3-a}{5} \end{cases}$$

Прибавим к обеим частям неравенства по  $5x$  и перенесем все слагаемые в левую часть неравенства:

$$6x - (a + 5x - 3) + \sqrt{6x} - \sqrt{a + 5x - 3} \geq 0.$$

Разложим первые два слагаемых на разность квадратов и вынесем за скобки:

$$(\sqrt{6x} - \sqrt{a + 5x - 3})(\sqrt{6x} + \sqrt{a + 5x - 3} + 1) \geq 0.$$

Вторая скобка может принимать только положительные значения, следовательно, последнее неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{6x} - \sqrt{a + 5x - 3} \geq 0.$$

Решением последнего являются все  $x \geq a - 3$ .

Рассмотрим теперь три случая пересечения этого решения с ОДЗ. Если  $a = 3$ , то решением являются все  $x \geq 0$ .

Если  $a > 3$ , то из рис. 16 следует, что решением является интервал  $x \geq a - 3$ .

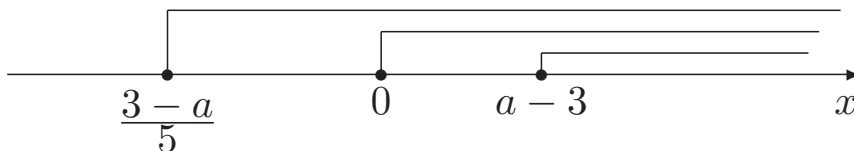


Рис. 16:

Аналогично, при  $a < 3$  найдем решение  $x \geq \frac{3-a}{5}$ .

*Ответ:* Если  $a < 3$  :  $x \geq \frac{3-a}{5}$ ,  
 если  $a = 3$  :  $x \geq 0$ ,  
 если  $a > 3$  :  $x \geq a - 3$ .

**Задача 4.8.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$ .

*Решение.*

При  $a \leq 0$  неравенство решений не имеет. Если  $a > 0$ , то область допустимых значений переменной задается неравенством  $|x| \leq a$ . Если при таких  $x$  возвести обе неотрицательные части неравенства в квадрат, то получим неравенство  $2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a$ .

Рассмотрим три случая.

Если  $a^2 - 2a < 0$ , т.е.  $0 < a < 2$ , то последнее неравенство справедливо при всех  $|x| \leq a$ .

Если  $a^2 - 2a = 0$ , т.е.  $a = 2$ , то неравенство примет вид  $2\sqrt{4 - x^2} > 0$ , откуда  $|x| < 2$ .

Если  $a^2 - 2a > 0$ , т.е.  $a > 2$ , то возводя обе неотрицательные части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство  $4(a^2 - x^2) > a^4 - 4a^3 + 4a^2$ , откуда  $x^2 < \frac{a^3(4-a)}{4}$ .

При  $a \geq 4$  это неравенство решений не имеет.

Если  $2 < a < 4$ , то  $|x| < \frac{1}{2}(a\sqrt{a(4-a)})$ . Нетрудно убедиться, что полученные значения удовлетворяют условию  $|x| \leq a$ .

*Ответ:* Если  $a \leq 0$  и  $a \geq 4$  : решений нет,  
 если  $0 < a < 2$  :  $-a \leq x \leq a$ ,  
 если  $a = 2$  :  $-2 < x < 2$ ,  
 если  $2 < a < 4$  :  $-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ .

**Задача 4.9.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ .

*Решение.*

Если  $a < 0$ , то из вида правой части неравенства следует, что  $x \leq 0$ . Но тогда и левая часть будет отрицательна, что невозможно.

Если  $a = 0$ , то рассматриваемому неравенству удовлетворяют все  $x > 0$ .

Если  $a > 0$ , тогда  $x \geq 0$ . Обе части неравенства неотрицательны, поэтому возведение в квадрат влечет равносильное неравенство  $(x + 4a)^2 > 25ax$  или  $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ . Разложим левую часть на множители:  $(x - a)(x - 16a) > 0$ , откуда с учетом  $a > 0$ ,  $x \geq 0$  получим, что решениями являются все  $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$ .

*Ответ:* Если  $a < 0$  : решений нет,  
 если  $a = 0$  :  $x > 0$ ,  
 если  $a > 0$  :  $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$ .

**Задача 4.10.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$ .

*Решение.*

Заметим, что при  $a = 0$  решением неравенства будет  $x = 0$ .

При  $a \neq 0$  рассмотрим графики функций

$$y_1 = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x - a)^2} \quad \text{и} \quad y_2 = a - x.$$

Рассматривая задачу с геометрической точки зрения, получим на координатной плоскости семейство полуокружностей  $y_1$  радиуса  $|a|$  с центром в точке  $(a; 0)$  и семейство прямых  $y_2 = a - x$ , проходящих через точку  $(a; 0)$  (рис. 17).

Решениями исходного неравенства будут являться абсциссы тех точек полуокружностей, которые лежат выше прямой. Таким образом, для решения задачи необходимо найти точку пересечения графиков  $y_1$  и  $y_2$ , т.е. решить уравнение  $\sqrt{2ax - x^2} = a - x$ .

При  $a > 0$  это  $x = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , а при  $a < 0$  значение  $x = a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Из рис. 17 можно записать

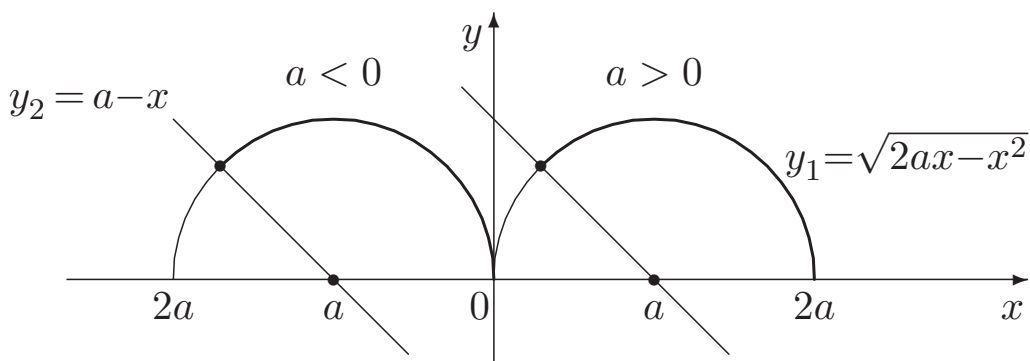


Рис. 17:

*Ответ:* Если  $a < 0$  :  $a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq x \leq 0$ ,  
 если  $a = 0$  :  $x = 0$ ,  
 если  $a > 0$  :  $a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq x \leq 2a$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.11.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\sqrt{x+a} = x+1$  имеет единственное решение? Найдите это решение.

*Ответ:* Если  $a = \frac{3}{4}$  :  $x = -\frac{1}{2}$ ,  
 если  $a > 1$  :  $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$ .

**Задача 4.12.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sqrt{4x+a} = 2x-1$ .

*Ответ:* Если  $a < -3$  : решений нет,  
 если  $a = -3$  :  $x = 1$ ,  
 если  $-3 < a \leq -2$  :  $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{a+3}}{2}$ ,  
 если  $a > -2$  :  $x = \frac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$ .

В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнения.

**Задача 4.13.**  $x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a$ .

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$  : решений нет,  
 если  $a = 0$  :  $x = 0$ ,  
 если  $a \in [1; +\infty)$  :  $x = \frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ .

**Задача 4.14.**  $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} = a.$

*Ответ:* Если  $a \in (-\infty; 0)$  : решений нет,  
если  $a = 0$  :  $x = 0$ ,  
если  $a \in (0; 1)$  : решений нет,  
если  $a \in [1; +\infty)$  :  $x = \frac{1}{4}(a-1)^2.$

**Задача 4.15.**  $\sqrt{x} - \sqrt{a-x} = 2.$

*Ответ:* Если  $a < 2$  : решений нет,  
если  $a \geq 2$  :  $x = \frac{a}{2} + \sqrt{a-1}.$

**Задача 4.16.**  $\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1.$

*Ответ:* Если  $a < 0$  : решений нет,  
если  $a \geq 0$  :  $x = \frac{a-1 + \sqrt{2a+1}}{2}.$

**Задача 4.17.**  $\sqrt[3]{x+a+63} - \sqrt[3]{x+a-1} = 4.$

*Ответ:*  $x_1 = -63 - a$ ,  $x_2 = 1 - a$  при любых  $a$ .

**Задача 4.18.**  $\sqrt{2x+a} + \sqrt{x-a} = 2.$

*Ответ:* Если  $a < \frac{4}{3}$  :  $x = 12 - 2a + 4\sqrt{8-3a}$ ,  
если  $\frac{4}{3} \leq a < \frac{8}{3}$  :  $x_{1,2} = 12 - 2a \pm 4\sqrt{8-3a}$ ,  
если  $a = \frac{8}{3}$  :  $x = \frac{20}{3}$ ,  
если  $a > \frac{8}{3}$  : решений нет.

**Задача 4.19.**  $\frac{a+5}{\sqrt{x+9}} = 1.$

*Ответ:* Если  $a \leq -5$  : решений нет,  
если  $a > -5$  :  $x = (a+2)(a+8).$

**Задача 4.20.**  $a - x = \sqrt{x^2 - 1}.$

*Ответ:* Если  $a < -1$  : решений нет,  
если  $-1 \leq a < 0$  :  $x = \frac{a^2+1}{2a}$ ,  
если  $0 \leq a < 1$  : решений нет,  
если  $a \geq 1$  :  $x = \frac{a^2+1}{2a}.$

**Задача 4.21.**  $x = a - \sqrt{a^2 - x} \sqrt{x^2 + a^2}.$

*Ответ:* Если  $a < 0$  : решений нет,  
если  $a \geq 0$  :  $x = \frac{3a}{4}$ .

**Задача 4.22.**  $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2.$

*Ответ:* Если  $a + b = 0$  : решений нет,  
если  $a + b \neq 0$  :  $x = \frac{a-b}{2}$ .

Для каждого значения параметра  $a$  решите неравенства:

**Задача 4.23.**  $\sqrt{5x^2 + a^2} \geq -3x.$

*Ответ:*  $|x| \geq -\frac{|a|}{2}.$

**Задача 4.24.**  $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0.$

*Ответ:* Если  $a = 0$  : решений нет,  
если  $a \neq 0$  :  $-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|.$

**Задача 4.25.**  $2\sqrt{x+a} > x+1.$

*Ответ:* Если  $a \leq 0$  : решений нет,  
если  $0 < a \leq 1$  :  $1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a},$   
если  $a > 1$  :  $-a \leq x < 1 + 2\sqrt{a}.$

**Задача 4.26.**  $\sqrt{1-x^2} \geq 2x+a.$

*Ответ:* Если  $a < -2$  :  $|x| \leq 1,$   
если  $|a| \leq 2$  :  $-1 \leq x \leq \frac{-2a + \sqrt{5-a^2}}{5},$   
если  $2 < a \leq \sqrt{5}$  :  $\frac{-2a - \sqrt{5-a^2}}{5} \leq x \leq \frac{-2a + \sqrt{5-a^2}}{5},$   
если  $a > \sqrt{5}$  : решений нет.

**Задача 4.27. (СГАУ)**  $x + \sqrt{10x} \geq a - 4 + \sqrt{a + 9x - 4}.$

*Ответ:* Если  $a < 4$  :  $x \geq \frac{4-a}{9},$   
если  $a = 4$  :  $x \geq 0,$   
если  $a > 4$  :  $x \geq a - 4.$

**Задача 4.28. (СГАУ)**  $x + \sqrt{8x} \geq 5 - a + \sqrt{5 + 7x - a}.$

*Ответ:* Если  $a < 5$  :  $x \geq 5 - a,$   
если  $a = 5$  :  $x \geq 0,$   
если  $a > 5$  :  $x \geq \frac{a-5}{8}.$



## 5. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

**Задача 5.1.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $a^{x+2} - 8 \cdot a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 2$ .

*Решение.*

Допустимыми значениями параметра являются все  $a > 0$ .

Преобразуем неравенство, используя свойства показательной функции:  $a^x \left(a^2 - \frac{8}{a}\right) > a + \frac{4}{a} + 2$ ;  $a^x \cdot \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a} > \frac{a^2+2a+4}{a}$ . Так как  $a > 0$  и квадратный трехчлен  $a^2 + 2a + 4 > 0$  при всех значениях параметра  $a$ , то после сокращения получаем неравенство:  $a^x \cdot (a - 2) > 1$ .

Рассмотрим два случая:

- 1)  $a > 2$ ;  $a^x > \frac{1}{a-2}$ . Показательная функция с основанием  $a > 2$  монотонно возрастает, поэтому получаем  $x > -\log_a(a-2)$ .
- 2) Подстановкой убеждаемся, что при  $a = 2$  и  $a = 1$  решений нет.

*Ответ:* Если  $a \leq 2$  : решений нет,  
если  $a > 2$  :  $x > -\log_a(a-2)$ .

**Задача 5.2.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$ .

*Решение.*

После замены  $3^x = t > 0$  получаем квадратное неравенство  $9t^2 + 8at - a^2 < 0$ , корнями которого являются числа  $t_1 = -a$ ;  $t_2 = \frac{a}{9}$ . Рассмотрим случаи:

- 1) если  $a > 0$ , то  $t_1 < 0 < t_2$  и решением квадратного неравенства является интервал  $-a < t < \frac{a}{9}$ . С учетом  $t > 0$  получаем неравенство:  $3^x < \frac{a}{9}$ , откуда  $x < \log_3 a - 2$ ;
- 2) если  $a = 0$ , то после подстановки в исходное неравенство получаем  $9^{x+1} < 0$ , что невозможно;
- 3) если  $a < 0$ , то  $t_2 < 0 < t_1$  и решением квадратного неравенства является интервал  $\frac{a}{9} < t < -a$ . С учетом  $t = 3^x > 0$  получаем неравенство:  $3^x < -a$ , откуда  $x < \log_3(-a)$ .

*Ответ:* Если  $a < 0$  :  $x < \log_3(-a)$ ,  
если  $a = 0$  : решений нет,  
если  $a > 0$  :  $x > \log_3 a - 2$ .

**Задача 5.3.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} \geq a^2 + 3a$ .

*Решение.*

Выполняя замену  $t = 2^{x+1}$ , получаем квадратное неравенство  $t^2 - 3t - (a^2 + 3a) \geq 0$ , корнями которого являются числа  $t_1 = -a$ ;  $t_2 = a + 3$ . В отличие от задачи 5.2, в данном неравенстве придется рассмотреть большее число случаев. Изобразим их графически на рис. 18, отметив точки, соответствующие уравнениям  $t_1 = -a = 0$ ;  $t_2 = a + 3 = 0$  и  $D = (2a + 3)^2 = 0$ .

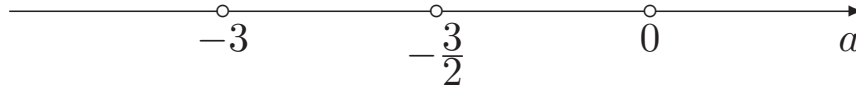


Рис. 18:

- 1) При  $a \geq 0$   $t_1 \leq 0 < t_2$ , решением квадратного неравенства является совокупность 
$$\begin{cases} 2^{x+1} < -a \\ 2^{x+1} > a + 3. \end{cases}$$
 Очевидно, что первое неравенство совокупности не имеет решений, а решением второго являются все  $x > \log_2(a + 3) - 1$ .
- 2) При  $-\frac{3}{2} < a < 0$  корни квадратного неравенства удовлетворяют условию  $0 < t_1 < t_2$  и решением исходного неравенства является совокупность 
$$\begin{cases} x < \log_2(-a) - 1, \\ x > \log_2(a + 3) - 1. \end{cases}$$
- 3) При  $a = -\frac{3}{2}$  получаем, что  $t_1 = t_2 = \frac{3}{2}$ , решением исходного неравенства является все  $x \in R$ .
- 4) При  $-3 < a < -\frac{3}{2}$  корни квадратного неравенства удовлетворяют условию  $0 < t_2 < t_1$  и решением исходного неравенства является совокупность 
$$\begin{cases} x < \log_2(a + 3) - 1, \\ x > \log_2(-a) - 1. \end{cases}$$
- 5) При  $a \leq -3$  получаем, что  $t_2 \leq 0 < t_1$  и аналогично случаю 1 получаем решение  $x > \log_2(-a) - 1$ .

*Ответ:*  $a \leq -3$  :  $x \in (\log_2(-a) - 1; +\infty)$ ,

$-3 < a < -\frac{3}{2}$  :  $x \in (-\infty; \log_2(a + 3) - 1) \cup (\log_2(-a) - 1; +\infty)$ ,

$a = -\frac{3}{2}$  :  $x \in R$ ,

$-\frac{3}{2} < a < 0$  :  $x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1) \cup (\log_2(a + 3) - 1; +\infty)$ ,

$a \geq 0$  :  $x \in (\log_2(a + 3) - 1; +\infty)$ .

**Задача 5.4.** (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра  $a$  неравенство  $x(x + \sqrt{4 - \log_a 82}) \geq \log_{\frac{1}{6}} 36a$  выполняется при

любых действительных значениях  $x$ ?

*Решение.*

Допустимые значения параметра  $a$  определяются системой

$$\begin{cases} 4 - \log_a 6 \geq 0 \\ a > 0; a \neq 1, \end{cases} \text{ решением которой являются все } a \in (0; 1) \cup [\sqrt[4]{6}; +\infty).$$

Исходное неравенство является квадратным относительно переменной  $x$ :

$$x^2 + \sqrt{4 - \log_a 6} \cdot x + (\log_6 a + 2) \geq 0.$$

График квадратного трехчлена, ветви которого направлены вверх, неотрицателен при выполнении условия  $D \leq 0$ , что приводит к неравенству

$$D = \left(4 - \frac{1}{\log_6 a}\right) - 4(\log_6 a + 2) \leq 0.$$

Заменяя  $\log_6 a = t$ , после преобразований получим рациональное неравенство  $\frac{(2t+1)^2}{t} \geq 0$ , решением которого является интервал  $t > 0$  и одна точка  $t = -\frac{1}{2}$ . Выполняя обратную замену, получаем  $a > 1$  и  $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$ , что с учетом ОДЗ дает

$$\text{Ответ: } a \in [\sqrt[4]{6}; +\infty) \text{ и } a = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

**Задача 5.5.** При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $2 \log_4(2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{0,5}(x^2 + ax - 2a^2) = 0$  больше 1?

*Решение.*

На основании свойств логарифмов исходное уравнение равносильно уравнению  $\log_2(2x^2 - x + 2a - 4a^2) = \log_2(x^2 + ax - 2a^2)$ , которое, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + 2a(1-a) = 0 \\ (x+2a)(x-a) > 0. \end{cases}$$

Уравнение записанной системы имеет корни  $x_1 = 1-a$  и  $x_2 = 2a$ .

Подставляя поочередно полученные значения  $x$  в неравенство системы, получим систему

$$\begin{cases} (a+1)(2a-1) < 0 \\ 4a^2 > 0, \end{cases}$$

из которой находим, что  $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$ .

Учитывая теперь, что  $x_1^2 + x_2^2 = 5a^2 - 2a + 1$ , из неравенства  $5a^2 - 2a + 1 > 1$  получаем значения  $a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{5}; +\infty)$ .

$$\text{Ответ: } a \in (-1; 0) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right).$$

**Задача 5.6.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\left( (2x + a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2 + x) \lg a \right) \cdot \lg \left( \frac{36a - 9a^2}{35} \right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не больше  $-1$ ?

*Решение.*

Допустимые значения параметра  $a$  определяются системой

$$\begin{cases} 22a - 4a^2 - 24 \geq 0 \\ 36a - 9a^2 > 0 \\ a > 0, \end{cases} \quad \text{решением которой являются все } a \in \left[ \frac{3}{2}; 4 \right).$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $\lg \left( \frac{36a - 9a^2}{35} \right) = 0$ , откуда  $a_1 = \frac{5}{3}$ ;  $a_2 = \frac{7}{3}$ . При этих значениях параметра  $a$  любое значение  $x$  удовлетворяет исходному уравнению, и, значит, последнее всегда имеет корни, о которых идет речь в задаче.

Пусть теперь первая скобка исходного уравнения равна нулю, что равносильно равенству

$$f(x) = (-2 \lg a) \cdot x^2 - 2(\lg a - \sqrt{22a - 4a^2 - 24}) \cdot x + a \cdot \sqrt{22a - 4a^2 - 24} = 0.$$

Из ОДЗ  $a \in \left[ \frac{3}{2}; 4 \right)$  следует, что ветви квадратного трехчлена направлены вниз, поэтому требования задачи будут выполнены только при условии

$$\begin{cases} f(0) = a \cdot \sqrt{22a - 4a^2 - 24} \geq 0 \\ f(-1) = (a - 2) \cdot \sqrt{22a - 4a^2 - 24} \geq 0, \end{cases}$$

откуда получаем с учетом ОДЗ  $a \in [2; 4) \cup \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ .

Объединяя полученные результаты, запишем

$$\text{Ответ: } a = \frac{3}{2}; \quad a = \frac{5}{3}; \quad a \in [2; 4).$$

**Задача 5.7.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $1 + \log_{\sqrt{5}}(2 \lg a - x) \cdot \log_x \sqrt{5} = 2 \log_x \sqrt{5}$  имеет решения?

*Решение.*

Допустимые значения переменной определяются системой 
$$\begin{cases} x > 0; & x \neq 1 \\ x < 2 \lg a. \end{cases}$$

Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию  $\sqrt{5}$ :

$$\log_{\sqrt{5}} x + \log_{\sqrt{5}}(2 \lg a - x) = 2,$$

откуда получим квадратное уравнение  $x^2 - 2 \lg a \cdot x + 5 = 0$ .

Если его дискриминант  $D = 4 \lg^2 a - 20 \geq 0$  или  $|\lg a| \geq \sqrt{5}$ , то исходное уравнение будет иметь решения.

С учетом ОДЗ  $0 < x < 2 \lg a$  получаем, что  $\lg a > 0$ , и, следовательно, условиям задачи удовлетворяют все  $\lg a \geq \sqrt{5}$  или  $a \geq 10^{\sqrt{5}}$ .

$$\text{Ответ: } a \geq 10^{\sqrt{5}}.$$

**Задача 5.8.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\sqrt{\frac{x}{a}} - 3 \cdot \log_3(x - x^2 + 21) > 0$  имеет ровно два целых решения?

*Решение.*

Решениями неравенства являются все  $x$ , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - 3 > 0 \\ x - x^2 + 21 > 1. \end{cases}$$

Последнему неравенству системы удовлетворяют  $x \in (-4; 5)$ .

Рассмотрим 2 случая:

- 1)  $a > 0$ , тогда из первого неравенства получим  $x > 3a$ . По условию задачи останется только 2 целых решения, если  $2 \leq 3a < 3$  или  $\frac{2}{3} \leq a < 1$  (рис. 19).

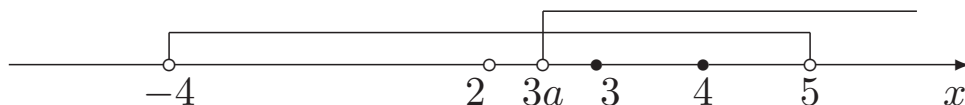


Рис. 19:

- 2)  $a < 0$ , тогда  $x < 3a$  и из рис. 20 следует, что условию задачи будут удовлетворять такие значения параметра, что  $-2 < 3a \leq -1$  или  $-\frac{2}{3} < a \leq -\frac{1}{3}$ .

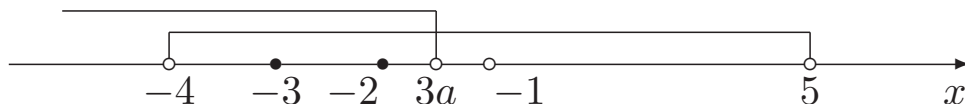


Рис. 20:

*Ответ:*  $a \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right)$ .

**Задача 5.9.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_5 x + 4(1 - a^2) \log_{25x} 5 - 2 = 0$  имеет два корня, расстояние между которыми больше  $\frac{24}{5}$ ?

*Решение.*

Допустимыми значениями переменной являются все  $x > 0$ ;  $x \neq \frac{1}{25}$ .

На основании свойств логарифмов преобразуем уравнение к виду  $(\log_5 x - 2)(\log_5 x + 2) + 4(1 - a^2) = 0$ , откуда  $\log_5 x = \pm 2a$ . Таким образом, исходное уравнение имеет два корня вида  $x_1 = 5^{2a}$  и  $x_2 = 5^{-2a}$ . Оба эти корня удовлетворяют первому условию ОДЗ  $x > 0$ , а второе условие  $x \neq \frac{1}{25}$  будет выполняться при  $a \neq \pm 1$ .

Перейдем теперь к решению задачи. Очевидно, что при  $a = 0$  условие задачи не выполняется. Рассмотрим два случая:

- 1)  $a > 0$ , тогда  $5^{2a} > 5^{-2a}$  и условие задачи равносильно неравенству  $5^{2a} - 5^{-2a} > \frac{24}{5}$ . Выполняя замену  $5^{2a} = t > 0$ ;  $5^{-2a} = \frac{1}{t}$ , получим, что  $t > 5$  или  $a > \frac{1}{2}$ .
- 2)  $a < 0$ , тогда наоборот,  $5^{-2a} > 5^{2a}$  и неравенство имеет вид  $5^{-2a} - 5^{2a} > \frac{24}{5}$ , откуда после аналогичной замены имеем  $a < -\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$ .

**Задача 5.10.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\log_{|x+a|}(x^2 - ax) \leq 2$  выполняется для всех  $x \in [2; 3]$ ?

Решение.

Найдем сначала, при каких значениях параметра  $a$  отрезок  $[2; 3]$  входит в область допустимых значений переменной, которая определяется системой

$$\begin{cases} x^2 - ax > 0 \\ |x + a| \neq 1 \\ x \neq -a. \end{cases}$$

Если  $a \geq 0$ , то отрезок  $[2; 3]$  входит в ОДЗ при  $0 \leq a < 2$  (рис. 21).

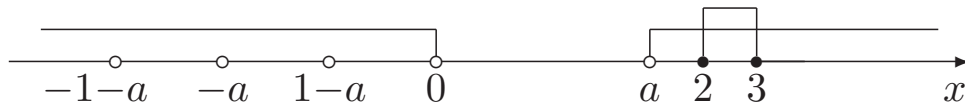


Рис. 21:

При  $a < 0$  возможны два случая (рис. 22):

в первом получаем условие  $\begin{cases} a < 0 \\ 3 < -1 - a, \end{cases}$  т.е.  $a < -4$ ,  
а во втором  $\begin{cases} a < 0 \\ 1 - a < 2, \end{cases}$  т.е.  $-1 < a < 0$ .

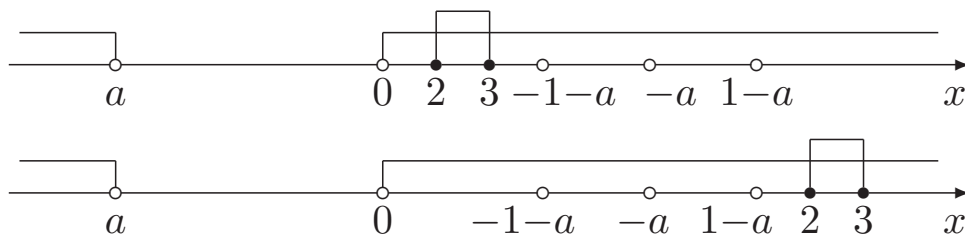


Рис. 22:

Решим отдельно в каждой области.

- 1)  $\begin{cases} 0 \leq a < 2 \\ 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$  тогда  $|x + a| > 1$ , логарифмическая функция возрастает, исходное неравенство равносильно следующему  $x^2 - ax \leq (x + a)^2$ , откуда  $x \geq -\frac{a}{3}$ .

Пересечем полученный ответ с ОДЗ. Из рис. 23 видно, что при

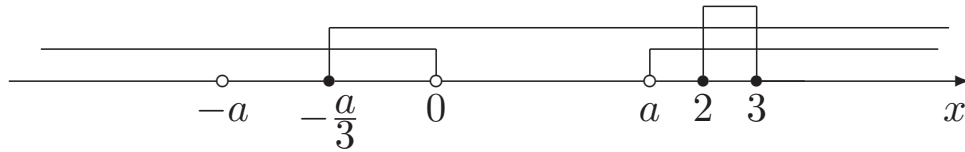


Рис. 23:

- всех  $a \in [0; 2)$  отрезок  $[2; 3]$  является решением неравенства.
- 2)  $\begin{cases} a < -4 \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$  В этом случае опять  $|x + a| > 1$  и аналогично предыдущему получим равносильное неравенство  $x^2 - ax \leq (x + a)^2$  или  $3ax \geq -a^2$ .

В отличие от случая 1 здесь значения параметра  $a$  отрицательны, поэтому решениями являются все  $x \leq -\frac{a}{3}$ . Покажем на рис. 24 условия, при которых пересечение найденного решения с ОДЗ будет содержать отрезок  $[2; 3]$ .

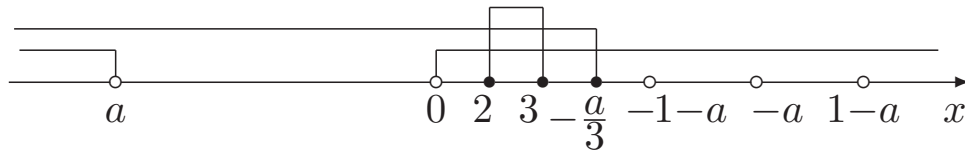


Рис. 24:

Из рис. 24 следует, что такие условия определяются системой

$$\begin{cases} -\frac{a}{3} \geq 3 \\ 3 < -1 - a, \end{cases} \quad \text{т.е. } a \leq -9.$$

- 3) При  $-1 < a < 0$  аналогично случаю 2 получим решение  $x \leq -\frac{a}{3}$ . Пересекая с ОДЗ, можно убедиться, что отрезок  $[2; 3]$  не будет являться решением при таких значениях параметра  $a$  (рис. 25).

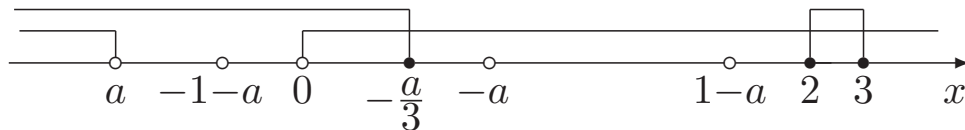


Рис. 25:

Ответ:  $a \in (-\infty; -9] \cup [0; 2)$ .



**Задача 5.11.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a \left( \frac{3+2x^2}{1+x^2} \right)$  и  $\log_a \left( \frac{5+4x^2}{1+x^2} \right)$  больше единицы при всех  $x$ ?

*Решение.*

Рассмотрим сумму логарифмов:

$$S = \log_a \left( \frac{3+2x^2}{1+x^2} \right) + \log_a \left( \frac{5+4x^2}{1+x^2} \right) = \log_a \left( 2 + \frac{1}{1+x^2} \right) + \log_a \left( 4 + \frac{1}{1+x^2} \right),$$

эта сумма имеет смысл при любых  $x$ . Заменим  $t = \frac{1}{1+x^2}$ , тогда очевидно, что  $0 < t \leq 1$ .

Составим неравенство  $\log_a(2+t) + \log_a(4+t) > 1$  и найдем значения параметра  $a$ , при которых неравенство выполняется при всех  $t \in (0; 1]$ .

1) Если  $a > 1$ , то логарифмическая функция возрастает. Запишем равносильное неравенство

$$(2+t)(4+t) > a \quad \text{или} \quad t^2 + 6t + 8 - a > 0.$$

Абсцисса вершины параболы  $f(t) = t^2 + 6t + 8 - a$  равна  $t_{\text{в}} = -3$ , ветви направлены вверх, следовательно, на интервале  $(0; 1]$  функция  $f(t)$  монотонно возрастает. Неравенство  $f(t) > 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $f(0) \geq 0$ , откуда  $1 < a \leq 8$ .

2) При  $0 < a < 1$  исходное неравенство равносильно следующему:

$$f(t) = t^2 + 6t + 8 - a < 0.$$

Аналогично первому случаю, функция  $f(t)$  монотонно возрастает на  $(0; 1]$ , поэтому необходимо и достаточно выполнения условия  $f(1) < 0$ , т.е.  $1 + 6 + 8 - a < 0$ ,  $a > 15$ . Полученный ответ не имеет пересечений с условием  $0 < a < 1$ .

*Ответ:*  $a \in (1; 8]$ .

**Задача 5.12.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a(2^x - 1)$  и  $\log_a(2^x - 7)$  равна единице ровно при одном  $x$ ?

*Решение.*

Допустимыми значениями параметра являются все  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Составим уравнение  $\log_a(2^x - 1) + \log_a(2^x - 7) = 1$ .

Обозначая  $t = 2^x > 0$ , запишем систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} (t-1)(t-7) = a \\ t > 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad t^2 - 8t + 7 - a = 0.$$

Парабола  $f(t) = t^2 - 8t + 7 - a$  имеет вершину в точке  $t_{\text{в}} = 4$ , ветви направлены вверх, корни расположены симметрично относительно вершины, поэтому условию  $t > 7$  может удовлетворять только больший корень, которому и будет соответствовать единственное решение уравнения. Необходимым и достаточным условием того,



чтобы больший корень был больше 7 является неравенство  $f(7) < 0$   
или  $49 - 56 + 7 - a < 0$ , откуда  $a > 0$ .

Ответ:  $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .

### Задачи для самостоятельного решения

В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнения или неравенства.

**Задача 5.13.** (СГАУ)  $a^{x+2} + 6a^{x+1} + 12a^x + 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 4$ .

Ответ: Если  $0 < a < 1$  :  $x < -\log_a(a+2)$ ,  
если  $a = 1$  :  $x \in R$ ,  
если  $a > 1$  :  $x > -\log_a(a+2)$ .

**Задача 5.14.** (СГАУ)  $4^x - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$ .

Ответ: Если  $a \leq -1$  : решений нет,  
если  $-1 < a \leq 0$  :  $x = \log_2(a+1)$ ,  
если  $a > 0$  :  $x_1 = \log_2(a+1)$ ;  $x_2 = \log_2 a$ .

**Задача 5.15.**  $9^{\lg(x-a)-\lg 2} = 3^{\lg(x-1)}$ .

Ответ: Если  $a < 0$  : решений нет,  
если  $0 \leq a < 1$  :  $x_{1,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$ ,  
если  $a \geq 1$  :  $x = a + 2 + 2\sqrt{a}$ .

**Задача 5.16.** (СГАУ)  $a^2 \cdot 4^{2x+1} - 5a \cdot 4^x + 1 > 0$ .

Ответ: Если  $a \leq 0$  :  $x \in R$ ,  
если  $a > 0$  :  $x \in (-\infty; -\log_4 a - 1) \cup (-\log_4 a; +\infty)$ .

**Задача 5.17.** (СГАУ)  $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ .

Ответ: Если  $a < 0$  :  $x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1)$ ,  
если  $a = 0$  : решений нет,  
если  $a > 0$  :  $x \in (-\infty; \log_2 a - 2)$ .

**Задача 5.18.** (СГАУ)  $25^{x+1} - 4 \cdot 5^{x+1} < a^2 + 4a$ .

Ответ: Если  $a \leq -4$  :  $x \in (-\infty; \log_5(-\frac{a}{5}))$ ,  
если  $-4 < a < -2$  :  $x \in (\log_5 \frac{a+4}{5}; \log_5(-\frac{a}{5}))$ ,  
если  $a = -2$  : решений нет,  
если  $-2 < a < 0$  :  $x \in (\log_5(-\frac{a}{5}); \log_5 \frac{a+4}{5})$ ,  
если  $a \geq 0$  :  $x \in (-\infty; \log_5 \frac{a+4}{5})$ .

**Задача 5.19.** (СГАУ)  $9^{x+1} - 3^{x+1} \geq a^2 + a$ .

*Ответ:* Если  $a \leq -1$  :  $x \in [\log_3(-\frac{a}{3}); +\infty)$ ,  
 если  $-1 < a < -\frac{1}{2}$  :  $x \in (-\infty; \log_3 \frac{a+1}{3}] \cup [\log_3(-\frac{a}{3}); +\infty)$ ,  
 если  $a = -\frac{1}{2}$  :  $x \in R$ ,  
 если  $-\frac{1}{2} < a < 0$  :  $x \in (-\infty; \log_3(-\frac{a}{3})] \cup [\log_3 \frac{a+1}{3}; +\infty)$ ,  
 если  $a \geq 0$  :  $x \in [\log_3 \frac{a+1}{3}; +\infty)$ .

**Задача 5.20.**  $x^{\log_a x} > a$ .

*Ответ:* Если  $0 < a < 1$  :  $x \in (a; \frac{1}{a})$ ,  
 если  $a > 1$  :  $x \in (0; \frac{1}{a}) \cup (a; +\infty)$ .

**Задача 5.21.** (СГАУ)  $\log_a(x-2) + \log_a x < 1$ .

*Ответ:* Если  $0 < a < 1$  :  $x \in (1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$ ,  
 если  $a > 1$  :  $x \in (2; 1 + \sqrt{1+a})$ .

**Задача 5.22.** (СГАУ)  $\log_a x^2 + 2 \log_a(x+2) = 1$ .

*Ответ:* Если  $a \leq 0$  : решений нет,  
 если  $0 < a < 1$  :  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}$ ;  $x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$ ,  
 если  $a = 1$  : решений нет,  
 если  $a > 1$  :  $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$ .

**Задача 5.23.**  $\log_{x+2}(x^2 - 2x + a) \geq 2$ .

*Ответ:* Если  $a \leq -8$  : решений нет,  
 если  $-8 < a \leq -3$  :  $x \in [\frac{a-4}{6}; 1 - \sqrt{1-a})$ ,  
 если  $-3 < a < -2$  :  $x \in [\frac{a-4}{6}; -1]$ ,  
 если  $a = -2$  : решений нет,  
 если  $a > -2$  :  $x \in (-1; \frac{a-4}{6}]$ .

**Задача 5.24.**  $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{a^3}} \cdot \log_a x + 1 = 0$ .

*Ответ:* Если  $a < 0$ ;  $a = 1$  : решений нет,  
 если  $0 < a < 1$ ;  $a > 1$  :  $x = \frac{1}{a^2}$ .

**Задача 5.25.** При каких значениях параметра  $a$  имеет решение система

$$\begin{cases} 3^{2x+y} + 3^{x+3y} = 3 \\ 3^y + 3^{-3x-3y} = 3^{a-2x} \end{cases}$$

*Ответ:*  $a > -1$ .

**Задача 5.26.** При каких значениях параметра  $a$  для любого  $x < 0$  выполняется неравенство  $\log_2(x^2 + ax + 1) > -1$ ?

*Ответ:*  $a < \sqrt{2}$ .

**Задача 5.27.** (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра  $a$  неравенство  $x \cdot (9x + \sqrt{24 - \log_a 2}) \geq \log_{0,5} 2a$  выполняется при любых  $x$ ?

*Ответ:*  $a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \quad a \geq \sqrt[24]{2}$ .

**Задача 5.28.** (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра  $a$  неравенство  $x^2 - x \cdot \sqrt{4 + \log_a 7} < \log_7 \frac{a}{49}$  не выполняется ни при каких  $x$ ?

*Ответ:*  $a = \sqrt{7}; \quad 0 < a \leq \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$ .

**Задача 5.29.** (СГАУ) При каких допустимых значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_5 x \cdot (\log_5(2 \lg a - x) \cdot \log_x 5 + 1) = 2$  имеет решение?

*Ответ:*  $a \geq 10^5$ .

**Задача 5.30.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\sqrt{\frac{x}{4a}} - 1 \cdot \log_4(2x - x^2 + 25) > 0$  имеет два целых решения?

*Ответ:*  $a \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}; 1)$ .

**Задача 5.31.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $((3x - a)\sqrt{10a - a^2 - 21} + (x^2 - 2x) \lg(2a - 1)) \cdot \lg \frac{28a - 4a^2}{45} = 0$  имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой не меньше двух.

*Ответ:*  $a = 3; \quad a = \frac{9}{2}; \quad 6 \leq a < 7$ .

**Задача 5.32.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_3 x + (a^2 - 4) \cdot \log_{3x} \frac{1}{3} - 3 = 0$  имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$ .

**Задача 5.33.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_a x + 8 \log_{ax^3} x - 3 = 0$  имеет два корня, расстояние между которыми меньше  $\frac{3}{2}$ ?

*Ответ:*  $a \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; 2)$ .

**Задача 5.34.** (СГАУ) Найдите, при каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\log_{|x+a|}(x^2 - 3ax) \leq 2$  выполняется для всех  $x \in [3; 4]$ .

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -20] \cup [0; 1]$ .

**Задача 5.35.** (СГАУ) Найдите, при каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\log_{|x-a|}(x^2 + 2ax) \geq 2$  выполняется для всех  $x \in [2; 4]$ .

*Ответ:*  $a \in [0; 1] \cup (5; 8]$ .

**Задача 5.36.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\log_2(x - 100) - \log_{0,5} \frac{|x - 101|}{105 - x} + \log_2 \frac{|x - 103|(105 - x)}{x - 100} > a$  имеет единственное целое решение?

*Ответ:*  $0 \leq a < \log_2 3$ .

**Задача 5.37.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a \left( \frac{3 + 2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$  и  $\log_a \left( \frac{4 + 3\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$  не равна единице ни при каких значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$ .

**Задача 5.38.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a (\sqrt{1 - x^2} + 1)$  и  $\log_a (\sqrt{1 - x^2} + 7)$  будет меньше единицы при всех допустимых значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (0; 1) \cup (16; +\infty)$ .

**Задача 5.39.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  значение выражения  $(1 - |x|)^{\log_5(1 - |x|) - |a - 1|}$  больше значения выражения  $0,2^{4 - a^2 - \log_{25}(1 + x^2 - 2|x|)}$  при всех допустимых значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-2; 2)$ .

**Задача 5.40.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  значение выражения  $(1 - x^2)^{\log_4(1 - x^2) - a^4}$  больше значения выражения  $0,25^{1 - |a| - \log_2 \sqrt{1 - x^2}}$  при всех допустимых значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-1; 1)$ .

## 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

**Задача 6.1.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  значение выражения  $1 + \cos x \cdot (5 \cos x + a \sin x)$  будет равно нулю хотя бы при одном значении  $x$ ?

*Решение.*

Уравнение  $1 + \cos x \cdot (5 \cos x + a \sin x) = 0$  после преобразований приводится к однородному  $\sin^2 x + a \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$ , которое после деления на  $\cos^2 x$  и замены  $t = \operatorname{tg} x$  превращается в квадратное:  $t^2 + at + 6 = 0$ . Так как  $t = \operatorname{tg} x$  может принимать любые значения, это уравнение будет иметь решения при условии  $D \geq 0$  или  $D = a^2 - 24 \geq 0$ .

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}; +\infty)$ .

**Задача 6.2.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a(\cos^2 x + 1)$  и  $\log_a(\cos^2 x + 5)$  будет равна единице хотя бы при одном значении  $x$ ?

*Решение.*

Допустимыми значениями параметра являются все  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Из уравнения  $\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1$  получим, что  $(\cos^2 x + 1)(\cos^2 x + 5) = a$ .

Обозначим  $\cos^2 x = t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , тогда уравнение примет вид  $f(t) = t^2 + 6t + (5 - a) = 0$ .

Условия задачи будут выполнены, если последнее уравнение будет иметь хотя бы один корень из отрезка  $[0; 1]$  (в отличие от задачи 6.1, где корень мог быть любым числом). В данном случае исследование только дискриминанта недостаточно. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке  $t_{\text{в}} = -3$ , следовательно, на отрезке  $[0; 1]$  функция  $f(t)$  монотонно возрастает. Для того, чтобы на  $[0; 1]$  существовал корень, в силу непрерывности необходимо и достаточно, чтобы на концах отрезка  $f(t)$  имела разные знаки  $f(0) \cdot f(1) \leq 0$  или  $(5 - a)(1 + 6 + 5 - a) \leq 0$ . Решая последнее неравенство, получаем

*Ответ:*  $a \in [5; 12]$ .

**Задача 6.3.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $\alpha$  система

$$\begin{cases} 8 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y) + 1 = 0 \\ x - y = \alpha \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

Найдите эти решения в зависимости от значений параметра  $\alpha$ .

*Решение.*

Преобразуем выражение  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$   
и подставим в первое уравнение с учетом  $x - y = \alpha$ :

$$4 \cos^2(x+y) + 4 \cos \alpha \cdot \cos(x+y) + 1 = 0.$$

Обозначая  $\cos(x+y) = t$ , вычислим дискриминант  
 $D = 16(\cos^2 \alpha - 1)$ .  $D \geq 0$  возможно только в двух случаях:

1)  $\cos \alpha = 1$ ,  $\alpha = x - y = 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .

Тогда  $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$ ,  $x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ .

Получим решение 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k-n); \end{cases}$$

2)  $\cos \alpha = -1$ ,  $\alpha = x - y = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ .

Тогда  $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$ ,  $x + y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$

и решение системы имеет вид 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \pi(k-n). \end{cases}$$

*Ответ:* Если  $\alpha = 2\pi n$ : 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k-n); \end{cases}$$
  
если  $\alpha = \pi + 2\pi n$ : 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \pi(k-n), \quad n, k \in Z. \end{cases}$$

**Задача 6.4.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0$$

выполняется для любых значений  $x$ ?

*Решение.*

Рассмотрим два случая.

1) Если  $\frac{-2a-13}{5} > 1$  или  $a < -9$ , то логарифмическая функция возрастает и неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 1.$$

Преобразуем:  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > \frac{a+9}{2}$  или  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) > \frac{a+9}{2}$ .

Так как область значений синуса есть отрезок  $[-1; 1]$ , последнее неравенство будет выполняться при любых  $x$ , если выражение  $\frac{a+9}{2}$  будет меньше  $-1$ , откуда  $a < -11$ .

2) Если  $0 < \frac{-2a-13}{5} < 1$  или  $-9 < a < -\frac{13}{2}$ , то с учетом убывания логарифмической функции получаем неравенство:

$$0 < \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} < 1$$

или после преобразований  $\frac{a+4}{2} < \sin(x-\frac{\pi}{3}) < \frac{a+9}{2}$ .

Рассуждая аналогично первому случаю, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{a+4}{2} < -1 \\ \frac{a+9}{2} > 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad a \in (-7; -6), \quad \text{что в пересечении}$$

с условием второго случая дает интервал  $a \in (-7; -\frac{13}{2})$ .

Объединяя ответы двух случаев, получаем

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -11) \cup (-7; -\frac{13}{2}).$$

**Задача 6.5.** (СГАУ) Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\log_{1-a} (2 - \cos x + \sin \frac{x}{2}) = 2$  имеет решение.

*Решение.*

Область допустимых значений параметра определяется системой

$$\begin{cases} 1 - a > 0 \\ 1 - a \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1).$$

По свойствам логарифмической функции перепишем уравнение в виде

$$2 - \cos x + \sin \frac{x}{2} = (1 - a)^2.$$

Заменяя  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  и полагая  $t = \sin \frac{x}{2}$ , получаем квадратное уравнение:

$$2t^2 + t + 2a - a^2 = 0.$$

Это уравнение имеет решения, если  $D = 8a^2 - 16a + 1 \geq 0$ , откуда

с учетом ОДЗ получаем  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}]$ .

Найдем теперь, при каких значениях параметра  $a$  хотя бы один из корней этого уравнения будет принадлежать отрезку  $[-1; 1]$ . Так как ветви параболы  $f(t) = 2t^2 + t + 2a - a^2$  направлены вверх, вершина находится в точке  $t_{\text{в}} = -\frac{1}{4}$ , то корни располагаются симметрично относительно точки  $t = -\frac{1}{4}$ . Поэтому, если меньший корень лежит в промежутке  $[-1; 1]$ , то больший — тем более. Таким образом, достаточно выяснить, при каких значениях параметра  $a$  больший корень параболы окажется в промежутке  $[-\frac{1}{4}; 1]$ . Это будет в том и только в том случае, если  $f(1) \geq 0$ . Вычисляя  $f(1)$ , получаем неравенство  $3 + 2a - a^2 \geq 0$ , которое справедливо при  $a \in [-1; 3]$ . Пересекая этот промежуток с предыдущим, получаем

$$\text{Ответ: } a \in [-1; 0) \cup (0; 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}].$$

**Задача 6.6.** В зависимости от<sup>95</sup> значений параметра  $a$  решите



уравнение  $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + a = \frac{\sin x - 2}{\sin x - 3}.$

*Решение.*

Полагая  $t = \sin x$ , приведем уравнение к виду  

$$at^2 - 5at + 6a - 1 = 0.$$

Если  $a = 0$ , то решений нет.

При  $a \neq 0$  и при условии  $a \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$  получаем корни уравнения  $t_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$ . Так как вершина параболы  $f(t) = at^2 - 5at + 6a - 1$  находится в точке  $t_B = \frac{5}{2}$ , условие  $|t| \leq 1$  для меньшего из корней будет выполняться, если на концах отрезка  $[-1; 1]$  функция будет иметь разные знаки:  $f(-1) \cdot f(1) \leq 0$  или  $(2a-1)(12a-1) \leq 0$ . Решением последнего неравенства является интервал  $a \in [\frac{1}{12}; \frac{1}{2}]$ .

*Ответ:* Если  $a \in [\frac{1}{12}; \frac{1}{2}]$ :  $x = (-1)^n \arcsin \frac{5a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} + \pi n$ ,  $n \in Z$ ,  
 при других  $a$  решений нет.

**Задача 6.7.** При каких значениях параметра  $a$  функция  $f(x) = 8ax - a \sin 6x - 7x - \sin 5x$  является возрастающей на всей числовой оси и не имеет критических точек?

*Решение.*

Функция  $f(x)$  дифференцируема при любом значении  $a$  и  

$$f'(x) = 8a - 6a \cos 6x - 7 - 5 \cos 5x.$$

Задачу можно переформулировать так: при каких  $a$  неравенство  $6a \cos 6x + 5 \cos 5x < 8a - 7$  справедливо для любого  $x$ ?

Так как последнее неравенство должно выполняться для любого значения  $x$ , оно должно быть справедливо и для  $x = 0$ , откуда  $6a + 5 < 8a - 7$  или  $a > 6$ . Учитывая теперь, что  $6a \cos 6x + 5 \cos 5x \leq 6|a| + 5 < 8a - 7$ , приходим к выводу, что при  $a > 6$  неравенство справедливо для любого  $x$ .

*Ответ:*  $a > 6$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.8.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\cos^4 x - (a + 2) \cos^2 x - a - 3 = 0$ .

*Ответ:* Если  $a \in [-3; -2]$ :  $x = \arccos \sqrt{a + 3} + \pi k$ ,  $k \in Z$ ,  
 если  $a \notin [-3; -2]$ : решений нет.

**Задача 6.9.** (СГАУ) В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $\sin^4 x + \cos^6 x + \sin 2x + a = 0$ .



*Ответ:* Если  $a \in [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$ :  $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(1 - \sqrt{2a-3}) + \pi k$ ,  
если  $a \notin [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$ : решений нет.  $k \in Z$ ,

**Задача 6.10.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a^2 + 8a + 16)(2 - 2 \cos x - \sin^2 x) + (32 + 2a^2 + 16a)(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$$

не имеет решений?

*Ответ:*  $a < -\frac{10}{3}$ ;  $-3 < a < -2$ .

**Задача 6.11.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_{a-2}(\frac{17}{8} + \cos x - \sin \frac{x}{2}) = 3$  имеет решение?

*Ответ:*  $a \in [\frac{5}{2}; 3) \cup (3; 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}]$ .

**Задача 6.12.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_{a+1}(\frac{25}{8} + \cos x - 2 \sin \frac{x}{2}) = 3$  имеет решение?

*Ответ:*  $a \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{\sqrt[3]{37}}{2} - 1]$ .

**Задача 6.13.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  значение выражения  $2 + \cos x \cdot (3 \cos x + a \sin x)$  не равно нулю ни при каких значениях  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10})$ .

**Задача 6.14.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  значение выражения  $3 + \sin x \cdot (2 \sin x + a \cos x)$  будет равно  $-1$  хотя бы при одном значении  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -4\sqrt{6}) \cup (4\sqrt{6}; +\infty)$ .

**Задача 6.15.** (ЕГЭ) При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a(\sin x + 2)$  и  $\log_a(\sin x + 3)$  будет равна единице хотя бы при одном значении  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in [2; 12]$ .

**Задача 6.16.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $\alpha$  система

$$\begin{cases} 4 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x + y) - 0,5 = 0 \\ x - y = \alpha \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

Найдите эти решения в зависимости от значений параметра  $\alpha$ .

*Ответ:* Если  $\alpha = 2\pi n : \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(k-n); \end{cases}$   
 если  $\alpha = \pi + 2\pi n : \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi(k+n) \\ y = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi(k-n), \end{cases} \quad n, k \in Z.$

**Задача 6.17.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $\alpha$  система  

$$\begin{cases} 2 \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x - y) + 0,25 = 0 \\ x + y = \alpha \end{cases}$$
 имеет решения?

Найдите эти решения в зависимости от значений параметра  $\alpha$ .

*Ответ:* Если  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n : \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n+k) \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n-k); \end{cases}$   
 если  $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n : \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n+k) \\ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n-k), \end{cases} \quad n, k \in Z.$

**Задача 6.18.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_{\frac{2a+34}{35}} \frac{2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - a + 7}{15} < 0$$

выполняется для любых значений  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-17; -12) \cup (\frac{1}{2}; 3).$

**Задача 6.19.** (СГАУ) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_{\frac{3-2a}{23}} \frac{3 \sin x + 3\sqrt{3} \cos x - 2a - 12}{28} > 0$$

выполняется для любых значений  $x$ ?

*Ответ:*  $a \in (-\infty; -23) \cup (-10; -9).$

**Задача 6.20.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $\cos x \leq 2 - a^2$ .

*Ответ:*  $|a| \leq 1 : x \in R,$   
 $1 < |a| \leq \sqrt{3} : x \in [\arccos(2 - a^2) + 2\pi k; \pi - \arccos(2 - a^2) + 2\pi k],$   
 $|a| > \sqrt{3} : \text{решений нет.} \quad k \in Z$

**Задача 6.21.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a + 1) \operatorname{tg}^2 x - 2 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + a = 0 \quad \text{не имеет решений?}$$

*Ответ:*  $a \leq -3; \quad a \geq 1.$

Учебное пособие

## **ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ**

Составители: Ефимов Евгений Александрович  
Коломиец Людмила Вадимовна

Компьютерный набор и верстка Е.А. Ефимов

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П. Королева.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

РИО Самарского государственного аэрокосмического  
университета имени академика С.П. Королева.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

**«Проверь себя»**  
**Работа к элективному курсу «Методы решения задач с параметрами»**  
**(6 вариантов)**

1

Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$  :

- 1)  $\frac{a(x-2)}{x-a} = 0$
- 2)  $(x-a)\sqrt{x-1} = 0$
- 3)  $\frac{x-a}{\sqrt{x-1}} = 0$
- 4)  $\sqrt{x}\sqrt{x-a} = 0$
- 5)  $(x-a)\sqrt{x^2-1} = 0$
- 6)  $a^2\sqrt{x-3} + |x| = 0$

2

Решите неравенство при всех значениях параметра  $a$  :

- 1)  $(x-a)(x-2a) < 0$
- 2)  $(x-a)^2(x-2a) \leq 0$
- 3)  $a\sqrt{x} \leq 0$
- 4)  $\frac{\sqrt{x-a}}{|x-2|} \geq 0$
- 5)  $|x|(x+a) \leq 0$
- 6)  $(x-2)|x+a| < 0$

3

Определите число корней уравнения при каждом значении параметра  $a$  :

- 1)  $\sqrt{2|x|-x^2} = a$
- 2)  $|x^2-6x+8| + |x^2-6x+5| = a$
- 3)  $||2x|-1| = x-a$
- 4)  $x^2 + 2|x-a| = 5$
- 5)  $|x^2-5x+6| = ax$
- 6)  $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = kx$

4

- 1) Найти значение  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} (2a-3)x - ay = 3a-2, \\ 5x - (2a+3)y = 5 \end{cases}$  имеет единственное решение.
- 2) Найти все значения  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$  не имеет решений.
- 3) При каких значениях  $a$  система уравнений  $\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4,5 \\ 2x + (a+1)y = -1 \end{cases}$  имеет бесконечное множество решений?
- 4) Найти все пары значений  $(\alpha; \beta)$ , при каждой из которых система уравнений  $\begin{cases} 8x + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)y = 4 \\ (\alpha - \beta)x + 26y = 2 \end{cases}$  имеет бесконечно много решений.
- 5) Числа  $a, b, c$  таковы, что система уравнений  $\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$  имеет бесконечно много решений, причём  $x=1, y=3$  – одно из этих решений. Найти числа  $a, b, c$ .
- 6) Найдите  $b \in R$ , такие, чтобы при любых  $a \in R$  имела хотя бы одно решение система уравнений  $\begin{cases} 3x + y = a \\ ax - y = b \end{cases}$

5

- 1) Найти все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств  $\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leq 0 \\ 2a - x + 2 \geq 0 \end{cases}$  удовлетворяется лишь при одном  $x$ .
- 2) Найти все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств  $\begin{cases} x^2 - 4x + a \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3a \leq 0 \end{cases}$  имеет единственное решение.
- 3) При каких действительных значениях параметра  $a$  система неравенств  $\begin{cases} ax - 1 < 0 \\ x > 4a \end{cases}$  не имеет решений?
- 4) При каких значениях параметра  $a$  имеет решение система неравенств  $\begin{cases} ax > -1 \\ x + a > 0 \end{cases}$  ?
- 5) Найти все значения параметра  $q$ , при каждом из которых множество решений неравенства  $(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$  не содержит ни одного решения неравенства  $x^2 \leq 4$
- 6) Найдите все значения  $\alpha$ , при которых решения системы неравенств  $\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + \alpha \leq 0 \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4\alpha \end{cases}$  образуют на числовой оси отрезок длины 1.

6

- 1) Найдите все значения  $a$ , для которых неравенство  $(a-3)x^2 - ax + 3a - 6 > 0$  выполняется при всех значениях  $x$ .
- 2) Найдите все значения  $a$ , для которых неравенство  $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$  выполняется при всех значениях  $x$ .
- 3) При каких  $a$  неравенство  $(a+2)x^2 - (2a+4)x + 7a + 3 > 0$  выполняется при всех значениях  $x$ .
- 4) При каких значениях  $a$  неравенство  $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$  верно при всех  $x$ ?
- 5) Найдите все значения  $p$ , при которых выражение  $\lg((p-1)x^2 + 2px + 3p - 2)$  определено при любых  $x$ .
- 6) При каких значениях параметра  $a$  для любого действительного числа  $x$  выполняется неравенство  $\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2 + 2x + 2) > 1$ ?

7

- 1) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $3x^2 - ax + 2a - 1 = 0$ . Вычислите  $x_1^3 + x_2^3$ .
- 2) При каких значениях  $a$  уравнение  $ax^2 + x + a - 1 = 0$  имеет два различных действительных корня  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих неравенству  $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1$ ?
- 3) При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + x\sqrt{6-a-a^2} - (7a+1) = 0$  принимает наибольшее значение?
- 4) При каких  $a$  разность корней уравнения  $2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$  равна их произведению?
- 5) На координатной плоскости  $(p; q)$  найдите множество точек, для которых уравнение  $x^2 - 2px + q = 0$  имеет два таких вещественных корня,  $x_1, x_2$ , что  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .
- 6) Найдите наименьшее значение выражения  $x_1^2 + x_2^2$ , если  $x_1$  и  $x_2$  корни уравнения  $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ .

8

- 1) При каких значениях  $a$  корни квадратного трёхчлена  $(2a-2)x^2 + (a+1)x + 1$  больше  $-2$ , но меньше  $0$ ?
- 2) При каких действительных значениях  $a$  все корни уравнения  $ax^2 - (a^3 + 2a^2 + 1)x + a(a+2) = 0$  лежат в отрезке  $[0; 1]$ ?
- 3) При каких действительных значениях  $k$  все решения неравенства  $(k-1)x^2 + (k^2 - 2k + 2)x + k - 1 > 0$  положительны и меньше  $2$ ?
- 4) Определите все значения параметра  $k$  так, чтобы один из корней уравнения  $x^2 - 2\log_k(k+1)x + \log_k(k-4) = 0$  был меньше  $0$ , а другой больше  $1$ ?
- 5) При каких действительных  $a$  корни уравнения  $4x^2 - 2x + a = 0$  подчиняются условию  $-1 < x_1 < 1$  и  $-1 < x_2 < 1$ ?

6) Пусть квадратное уравнение  $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$  имеет корни  $x_1, x_2$ . Найти все такие  $a$ , что  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют условию  $x_1 < 2 < 3 < x_2$ .

## 9

1) При каком значении параметра  $a$  значения функции  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + a$  в точке  $x=2$  и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?

2) При каких  $a > 0$  точка  $x=3$  является точкой минимума функции  $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$ ?

3) При каких  $a$  функция  $f(x) = 2ax^3 + 3(3-2a)x^2 - 36x + 4$  возрастает на отрезке  $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ ?

4) При каких значениях параметра  $a$  функция  $f(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x(a + \cos x) + (1-2a)x - 2$  убывает на всей числовой прямой?

5) Найдите наименьшее значение  $a$ , при котором уравнение  $\frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} = a$  на интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  имеет хотя бы одно решение.

6) Сколько корней в зависимости от параметра  $a$  имеет уравнение  $x^5 + x = a + 2a^3$ ?

## 10

1) Найти все  $a$  ( $a > 0$ ), для каждого из которых  $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leq a$ .

2) Найти все числа  $\alpha$ , для каждого из которых  $\int_1^2 (a^2 + (4 - 4\alpha)x + 4x^3) dx \leq 12$ .

3) Найти все решения уравнения  $\int_0^\alpha \cos(x + \alpha^2) dx = \sin \alpha$ , принадлежащие отрезку  $[2, 3]$ .

4) Найти все решения уравнения  $\int_{-u}^u \cos(x + 2u^2 - u) dx = -\sin 2u$ , принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{21}\right]$ .

5) Найти все числа  $A$  и  $B$ , при которых функция  $f(x) = A \sin \pi x + B$  удовлетворяет условиям  $f'(1) = 2$  и  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ .

6) Найти все числа  $A$  и  $B$ , при которых функция  $f(x) = A \cdot 3^x + B$  удовлетворяет условиям  $f'(0) = 2$  и  $\int_1^2 f'(x) dx = 12$ .

11

1) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение уравнения  $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$  больше 2.

2) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых решение уравнения  $6 - 3b + 4bx = 4b + 12x$  меньше 1.

3) Найдите все значения параметра  $m$ , при каждом из которых решение уравнения  $5x - 18m = 21 - 5mx - m$  больше 3.

4) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых решение уравнения  $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$  меньше 2.

5) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых решение уравнения  $14x + 8b = 8 + 2bx + 3b$  больше 1.

6) Найдите все значения параметра  $m$ , при каждом из которых решение уравнения  $16m - 40x = 5mx - 3m - 124$  меньше 3.

12

1) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(2, 5)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[2, 3]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(5, 16)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[1, 2]$ , удовлетворяющее уравнению

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}.$$

3) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(2, 7)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[1, 2]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\log_3\left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{12}\right)\right) = |\cos \alpha x| - 1.$$

4) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(1, 5)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[2, 3]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\cos^2\left(\pi x + \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1 + |\sin \alpha x|}.$$

5) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(2, 5)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[2, 3]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

6) Найти все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(2, 7)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно число  $x$  из отрезка  $[1, 2]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\log_3\left(1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{12}\right)\right) = |\cos \alpha x| - 1.$$



1) В два различных сосуда налиты растворы соли, причём в первый сосуд налито 5 кг, а во второй – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в  $p$  раз, а во втором сосуде – в  $q$  раз. Известно, что  $pq=9$ . Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

2) В двух различных сосудах содержались смеси воды и песка, причём в первом сосуде было 1000 кг смеси, а во втором – 1960 кг. В оба сосуда добавили воды. При этом процентное содержание песка уменьшилось в  $k$  раз в первом сосуде и в  $m$  раз во втором сосуде. Известно, что  $km=9-k$ . Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в оба сосуда вместе.

3) Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая – на  $b$  га меньше первой, а третья – на  $2b$  га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки, и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение  $b$  ( $0 < b < 1$ ), при котором всё поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

4) Три экскаватора участвовали в рытье котлована объёмом 340 м<sup>3</sup>. За один час первый экскаватор вынимает 40 м<sup>3</sup> грунта, второй на  $c$  м<sup>3</sup> меньше первого, а третий на  $2c$  м<sup>3</sup> больше первого. Сначала работали одновременно первый и второй экскаваторы и выкопали 14 м<sup>3</sup> грунта. Затем оставшуюся часть котлована выкопали, работая одновременно, первый и третий экскаваторы. Определите значение  $c$  ( $0 < c < 15$ ), при котором котлован выкопан за 4 часа, если работа велась без перерыва.

5) В классе каждый ученик имел разряд хотя бы по одному из следующих видов спорта: плавание, волейбол, баскетбол. Разряды по всем трём видам спорта одновременно имеют 4 ученика. Учеников, имеющих разряды одновременно по волейболу и баскетболу, в  $n$  раз больше чем учеников, имеющих разряды только по плаванию, причём  $6 \leq n \leq 12$  ( $n$  – целое число). Число учеников, имеющих разряд по плаванию, на 10 больше числа учеников, имеющих разряд только по одному виду спорта, и равно числу учеников, имеющих разряды только по двум видам спорта. Определить, сколько учеников в классе, если число учеников, имеющих разряд по плаванию и разряд по волейболу или баскетболу, равно 20.

6) В группе каждый из учащихся знает хотя бы один иностранный язык: английский, французский или немецкий. Известно, что нет ни одного учащегося, который бы знал все три указанных языка. 13 учащихся знают лишь по одному иностранному языку. Никто из группы не знает одновременно французский и немецкий, но половина учащихся, владеющих английским, знает ещё один иностранный язык. Девушек, знающих только английский, в 2 раза больше, чем учащихся, знающих только французский. Определить, сколько учащихся в группе, если юношей, знающих только английский, в  $n$  раз больше, чем учащихся, знающих только французский, где  $3 \leq n \leq 15$  ( $n$  – целое число).